

БАЛАНС

Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»

А.Г. Рубин, П.В. Чулков

**МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА
И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА,
ГЕОМЕТРИЯ**

**АЛГЕБРА И НАЧАЛА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

10 класс

Базовый и углублённый уровни

Москва
БАХАСС
2016

УДК 373.167.1:151
ББК 22.14я72
Р82

Федеральный государственный образовательный стандарт
Образовательная система «Школа 2100»



Руководитель издательской программы –
член-корр. РАО, доктор пед. наук, проф. *Р.Н. Бунеев*

Рубин, А.Г.
Р82 **Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 кл. : учеб. для организаций, осуществляющих образовательную деятельность. Базовый и углублённый уровни / А.Г. Рубин, П.В. Чулков. – М. : Баласс, 2016. – 422 с. : ил. (Образовательная система «Школа 2100»).**

ISBN 978-5-906567-01-7

Учебник «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа» предназначен для учащихся 10 класса, изучающих предмет на базовом или углублённом уровне. Соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего общего образования. Является продолжением непрерывного курса математики и составной частью комплекта учебников развивающей Образовательной системы «Школа 2100».

Может использоваться как учебное пособие.

УДК 373.167.1:151
ББК 22.14я72

Данный учебник в целом и никакая его часть не могут быть скопированы
без разрешения владельца авторских прав

ISBN 978-5-906567-01-7

© Рубин А.Г., Чулков П.В., 2016
© ООО «Баласс», 2016

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дорогие ребята !

Перед вами учебник алгебры и начал математического анализа для десятого класса, написанный Александром Григорьевичем Рубиным и Павлом Викторовичем Чулковым. Он входит в систему учебников образовательной системы «Школа 2100».

Учебник разбит на главы, а каждая глава – на параграфы. Каждый параграф обозначается двумя числами: число слева от точки – номер главы, а число справа от точки – номер параграфа в этой главе. В каждой главе рассматривается своя тема, а в каждом параграфе – отдельные вопросы этой темы. В конце каждого параграфа приводятся задания, работа с которыми позволит выяснить, с какой степенью глубины вы овладели теоретическим материалом, изложенным в этом параграфе, и, что самое важное, умеете ли вы применять его при решении конкретных задач. К большинству заданий в конце учебника приводятся ответы.

Эти задания даются на трёх уровнях сложности, принятых в учебниках образовательной системы «Школа 2100». Каждый уровень обозначается специальным образом.

Н Необходимый уровень. Задания, которые должны уметь выполнять все учащиеся. Выполнение этих заданий поможет вам понять, усвоены ли основные понятия и факты, умеете ли вы применять их к решению стандартных задач.

П Повышенный уровень. Задания, которые выполняют те учащиеся, которые хотят усовершенствовать свои знания. Они требуют более глубокого усвоения учебного материала, для их решения, наряду с известными приёмами и идеями, может потребоваться выдвижение некоторой новой идеи.

М Максимальный уровень. Задания, которые выполняют те учащиеся, которые хотят научиться решать более сложные нестандартные задачи. Работа над ними может потребовать значительных усилий, изобретательности и настойчивости.

При этом ни на каком из уровней выполнение всех содержащихся в учебнике заданий не является обязательным! Они выбираются в соответствии с возможностями и потребностями учащихся под руководством педагога.

Работая по нашему учебнику, вы не только узнаете много нового, не только научитесь решать большое количество разнообразных математических задач, но и приобретёте важнейшее умение – учиться самостоятельно:

- ставить учебную цель;
- планировать своё движение к цели и действовать по плану;
- оценивать результаты своего труда.

ГЛАВА I

Тригонометрические функции

1.1. Углы в тригонометрии

Из курса геометрии вы знакомы с геометрической фигурой «*угол*». Так получилось, что в разных учебниках геометрии даются два несколько отличающихся одно от другого определения угла. Первое определение таково: Угол – это геометрическая фигура, образованная двумя лучами, выходящими из одной точки (рис. 1.1).

Угол разбивает плоскость на две части (на рис. 1.2 они заштрихованы разным цветом). Каждая из этих частей (включая оба луча, образующие угол) называется *плоским углом*.

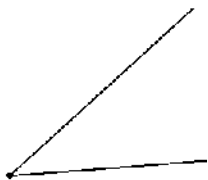


Рис. 1.1

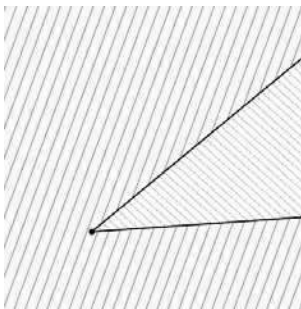


Рис. 1.2

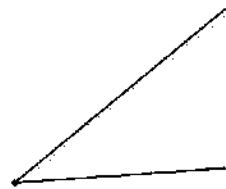


Рис. 1.3

Второе определение угла как раз заключается в том, что углом называют геометрическую фигуру, образованную двумя лучами, выходящими из одной точки, и той частью плоскости, которая является выпуклой (рис. 1.3). Напомним, что геометрическая фигура называется выпуклой, если вместе с любыми двумя принадлежащими ей точками она содержит соединяющий их отрезок.

Другими словами, при таком определении под словом «угол» сразу понимают тот из плоских углов, который является выпуклым.

Углы можно измерять. Каждому углу ставится в соответствие определённое положительное число, называемое *величиной* этого угла. Чаще всего величина угла обозначается точно так же, как и сам угол*. При этом выполнены *основные свойства* измерения углов (аналогичные основным свойствам измерения отрезков):

* В этой традиции имеются определённые недостатки – всякий раз, когда видишь запись вроде $\angle AOB$, нужно чётко отдавать себе отчёт, идёт речь о геометрической фигуре «угол» или о числе – величине этого угла. Но эта традиция уже сложилась, все к ней привыкли, и при аккуратном пользовании такими обозначениями непониманий обычно не возникает.

1) Равные углы имеют равные величины.

2) Если точка C лежит внутри угла AOB , то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$ (т.е. если угол разбит лучом, выходящим из его вершины, на два угла, то его величина равна сумме величин этих двух углов).

Развёрнутым углом называется угол, образованный взаимно дополнительными лучами. Распространённой единицей измерения углов является *градус*. Один градус – это $\frac{1}{180}$ развёрнутого угла. Можно определить градус и по-другому. Величины углов

удобно определять с помощью центрального угла окружности. Так, если разделить окружность на 360 равных дуг, то величина центрального угла, опирающегося на одну такую дугу (т.е. на $\frac{1}{360}$ часть окружности) и есть один градус (1°). В

мореходстве используется мера углов *румб*. Он определяется как величина центрального угла, опирающегося на $\frac{1}{32}$ часть окружности. В этих угловых мерах

видна произвольность выбираемого количества частей, на которые делится окружность. На этом же пути возникает ещё одна единица измерения углов – *радиан*. В определении радиана тоже используется конструкция, связанная с центральным углом, только дуга, на которую опирается этот центральный угол, выбирается не путём деления окружности на то или иное количество равных частей, а из других соображений.

Углом в 1 радиан называется центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности (рис. 4).

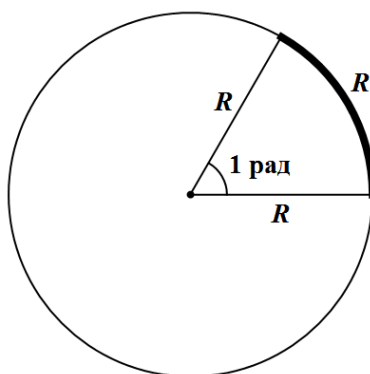


Рис. 1.4

Угол в 1 радиан обозначается 1 рад. Чаще всего наименование «рад» вообще не пишут, подразумевая, что если единица измерения угла не указана, то величина этого угла выражена в радианах. Например, угол величиной 3 или угол величиной $\frac{\pi}{12}$

нужно понимать как угол величиной 3 рад или угол величиной $\frac{\pi}{12}$ рад соответственно.

При измерении углов употребляется две основные языковые конструкции. Говорят «величина угла равна 60° » и говорят «градусная мера угла составляет 60° », при этом слово «составляет» может быть опущено. Точно такие же языковые конструкции употребляются и при измерении угла в радианах.

Поскольку длина окружности радиуса R равна $2\pi R$, длина полуокружности равна πR , и величина развёрнутого угла как центрального угла, опирающегося на полуокружность, выраженная в радианах, равна π . Поэтому для перевода градусной меры углов в радианную и наоборот используется формула $\pi = 180^\circ$, выражающая тот факт, что величина развёрнутого угла составляет 180° , и она же составляет π рад. Некоторые предпочитают для перевода писать пропорцию по типу «градусы под градусами, радианы под радианами», а некоторым удобнее для получения градусной меры умножать радианную меру на $\frac{180}{\pi}$, а для обратного перевода – получения

радианной меры из градусной – умножать последнюю на обратную дробь $\frac{\pi}{180}$.

Пример 1. Выразите в радианах величину угла, градусная мера которого равна 75° .

Решение. Запишем соотношение:

$$180^\circ - \pi \text{ рад},$$

$$75^\circ - x \text{ рад}.$$

$$\text{Отсюда получаем пропорцию } \frac{180}{75} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow x = \frac{75\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}.$$

Второе решение выглядит так: для перевода градусной меры в радианную умножим её на $\frac{\pi}{180}$. Получим: $75 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$.

Пример 2. Выразите в градусах величину угла, радианная мера которого равна 2.

Решение. Запишем соотношение:

$$180^\circ - \pi \text{ рад},$$

$$x^\circ - 2 \text{ рад}.$$

Отсюда получаем пропорцию $\frac{180}{x} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{180 \cdot 2}{\pi} = \frac{360}{\pi}$. Если округлить до целых, то $x \approx 115^\circ$.

Можно решать и по-другому: для перевода радианной меры в градусную умножим её на $\frac{180}{\pi}$. Получим: $2 \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{360}{\pi} \approx 115^\circ$.

Выше мы обсудили, что понимают под углом в геометрии. Перед тем как говорить о том, что понимают под углом в тригонометрии, вспомним ещё одно геометрическое понятие.

В курсе геометрии 7–9 классов вы познакомились с геометрическим преобразованием плоскости *поворотом на данный угол α* . Если задан центр поворота – точка O , то каждой точке A , отличной от точки O , ставится в соответствие такая точка A_1 , что $OA_1 = OA$ и $\angle A_1OA = \alpha$. При этом луч OA_1 может откладываться от луча OA в двух направлениях – против часовой стрелки или по часовой стрелке.

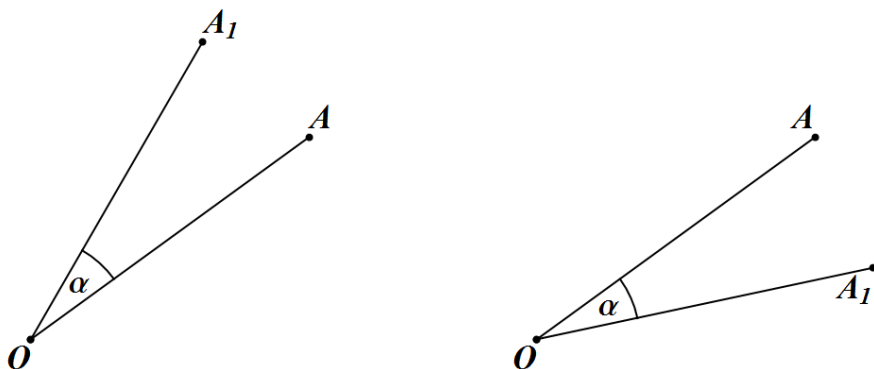


Рис. 1.5

Повороты, осуществляемые против часовой стрелки, принято считать поворотами на положительный угол, а по часовой стрелке – на отрицательный. Мы будем говорить и «поворот на 30° против часовой стрелки» и «поворот на угол $+30^\circ$ », и «поворот на угол 30° ». Точно так же будем говорить и «поворот на угол 20° по часовой стрелке», и «поворот на угол -20° ».

Если взять в качестве центра поворота точку O и выбрать любую точку A , отличную от точки O , то при выполнении поворота вокруг точки O на 50° точка A перейдёт в точку B (рис. 1.6 а). При этом $OB = OA$ и $\angle AOB = 50^\circ$. Если затем выполнить поворот относительно того же центра на угол 20° , то точка B перейдёт в некоторую точку C , для которой $OC = OB$ и $\angle BOC = 20^\circ$ (рис. 6 а). В результате последовательного выполнения двух названных поворотов точка A перейдёт в точку C , при этом $OC = OA$ и $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC = 50^\circ + 20^\circ = 70^\circ$. В рассмотренном примере видно, что при последовательном выполнении двух поворотов относительно одного и того же центра O получается поворот относительно этого же центра O , причём угол этого поворота равен сумме углов первых двух поворотов.

Аналогичная ситуация имеет место не только для поворотов на положительный угол. Если, к примеру, сначала выполнить поворот на 50° , а затем поворот на угол -20° вокруг того же центра, то в результате получится поворот на 30° (рис. 1.6 б).

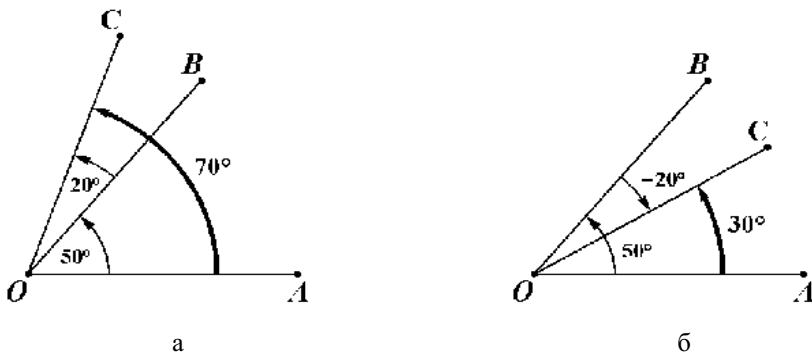


Рис. 1.6

Таким образом, поворот обладает следующим важным свойством: последовательное выполнение двух поворотов относительно одного и того же центра является поворотом относительно этого же центра, причём угол этого поворота равен сумме углов поворотов.

Выполнив поворот на некоторый угол, можно выполнить поворот в том же направлении ещё на некоторый угол, и это можно делать много раз. Таким образом, угол поворота может быть любым действительным числом – положительным, отрицательным или равным нулю. Поворотом на нулевой угол при этом считается тождественное преобразование плоскости – все точки остаются на своих местах.

Под углом в тригонометрии понимается угол поворота.

При повороте на 360° каждая точка плоскости занимает такое же положение, как и до поворота. Такой поворот иногда называют *полным оборотом*. Поворот на 360° по часовой стрелке, т.е. на угол -360° , называют *полным оборотом в отрицательном направлении*.

Возьмём произвольный угол, скажем, 500° . Поскольку $500^\circ = 360^\circ + 140^\circ$, поворот на угол 500° можно представить как последовательное выполнение полного оборота и поворота на 140° (или наоборот, поворота на 140° , а затем полного оборота). Аналогично, поворот на угол -700° можно представить как результат выполнения поворота на 20° и двух полных оборотов в отрицательном направлении, поскольку $-700^\circ = 20^\circ - 2 \cdot 360^\circ$.

Поворот на угол x° можно представить как последовательное выполнение поворота на угол от 0° до 360° и нескольких полных оборотов – в положительном или отрицательном направлении. При этом если сам угол лежит в пределах от 0° до 360° , то дополнительных полных оборотов не понадобится; можно считать, что их количество равно нулю.

Таким образом, для поворота на любой угол x° можно записать $x^\circ = y^\circ + 360^\circ n$, где $y^\circ \in [0^\circ; 360^\circ)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Аналогичная формула при радианном измерении углов выглядит так:

$$\alpha = \beta + 2\pi n, \text{ где } \beta \in [0; 2\pi), n \in \mathbb{Z}.$$

H

- 9

10 Выразите в градусах величину угла, радианная мера которого равна:

а) 3π ; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$;

в) $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{10}{3}$; $\frac{3}{7}$.

б) 2; 7; 10; 13;

г) $\frac{\pi}{360}$; $2\frac{1}{2}$; $\frac{15}{8}$; $\frac{9\pi}{10}$.

11 Выразите в градусах величину угла, радианная мера которого равна:

а) 4π ; $\frac{\pi}{5}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{4}$;

в) $\frac{1}{5}$; $-\frac{3}{4}$; $-\frac{11}{10}$; $\frac{180}{179}$;

б) 2; -7; 6; -11;

г) $-\frac{19\pi}{36}$; $\frac{41\pi}{90}$; $-\frac{9}{2}$; $\frac{7}{3}$.

12 Выразите в градусах, округлив ответ с данной точностью, величину угла, радианная мера которого равна:

а) $\frac{\pi}{7}$; $\frac{4}{3}$; 7 до 10° ;

в) $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{6}$ до $0,1^\circ$;

б) 2; 3; $\frac{9}{11}\pi$ до 1° ;

г) $\frac{\pi}{13}$; $\frac{22}{21}$; $\frac{10}{3}$ до $0,01^\circ$.

13 Выразите в радианах, округлив ответ с данной точностью, величину угла, градусная мера которого равна:

а) 149° ; 308° ; 599° ; 610° до 1;

в) 494° ; 735° ; 2130° ; 4960° до 10;

б) 183° ; 396° ; 575° ; 702° до 0,1;

г) 27° ; 29° ; 41° ; 84° до 0,01.

II

14 Представьте следующие углы в виде $x^\circ = y^\circ + 360^\circ n$, где $y^\circ \in [0^\circ; 360^\circ)$, $n \in \mathbb{Z}$.

а) 46° ;

в) -316° ;

б) -729° ;

г) 1374° .

15 Представьте следующие углы в виде $\alpha = \beta + 2\pi n$, где $\beta \in [0; 2\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$.

а) $-\frac{67\pi}{90}$;

в) $\frac{301\pi}{180}$;

б) $\frac{77\pi}{30}$;

г) $-\frac{232\pi}{45}$.

16 Среди данных углов найдите наименьший положительный.

а) $-225^\circ + 360^\circ n$, $n \in \mathbb{Z}$;

в) $-358^\circ + 360^\circ n$, $n \in \mathbb{Z}$;

б) $3\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

г) $-\frac{2}{3}\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

17 Среди данных углов найдите наибольший отрицательный.

а) $77^\circ + 360^\circ n, n \in \mathbb{Z}$;

в) $185^\circ + 360^\circ n, n \in \mathbb{Z}$;

б) $\frac{9}{8}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

г) $\frac{19}{5}\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

18 Среди данных углов найдите наименьший по модулю.

а) $250^\circ + 360^\circ n, n \in \mathbb{Z}$;

в) $-589^\circ + 360^\circ n, n \in \mathbb{Z}$;

б) $\frac{38\pi}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

г) $-\frac{16\pi}{15} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

1.2. Тригонометрические функции угла и их основные свойства

Рассмотрим декартову прямоугольную систему координат xOy с расположением осей как на рис. 1.7, т.е. будем считать ось Ox расположенной горизонтально с положительным направлением слева направо, а ось Oy расположенной вертикально с положительным направлением снизу вверх. Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Такую окружность принято называть *единичной* или *тригонометрической*.

Выполним поворот луча Ox на угол α относительно точки O , считая, как было сказано в параграфе 1.1, что при положительных α поворот осуществляется против часовой стрелки, при отрицательных α – по часовой стрелке, а при $\alpha = 0$ луч Ox остаётся на месте. При этом нам несущественно, в каких единицах выражена величина угла поворота α . Как принято в математике, мы будем пользоваться или градусной или радианной мерой углов.

Точку пересечения с тригонометрической окружностью луча, полученного после поворота луча Ox на угол α относительно точки O , обозначим P_α (рис. 1.8).

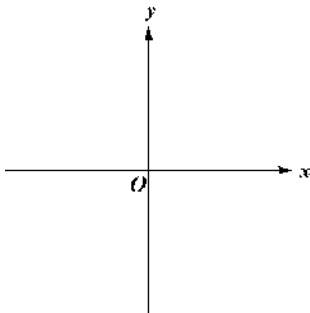


Рис. 1.7

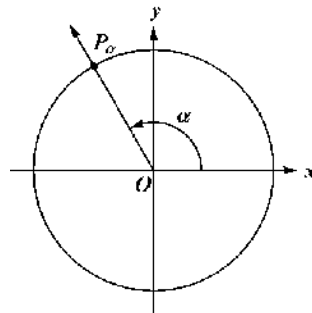


Рис. 1.8

Точки, полученные после поворота луча Ox на разные углы могут совпадать. Это будет происходить, если углы отличаются друг от друга на целое количество полных оборотов. Поскольку величина полного оборота составляет 360° или 2π радиан, то условие совпадения точек P_α и P_β может быть записано в виде $\alpha - \beta = 360^\circ n$, где $n \in \mathbb{Z}$ для градусной меры углов, или в виде $\alpha - \beta = 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$ – для радианной меры.

Пусть α – произвольный угол, а P_α – соответствующая точка тригонометрической окружности. Абсцисса точки P_α называется косинусом угла α и обозначается $\cos \alpha$, а ордината – синусом угла α и обозначается $\sin \alpha$ (рис. 1.9).

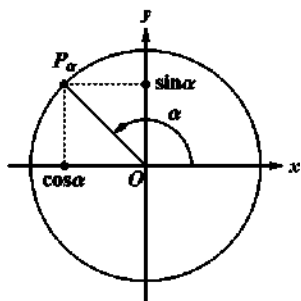


Рис. 1.9

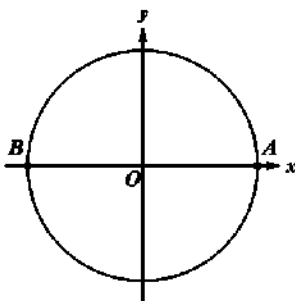


Рис. 1.10

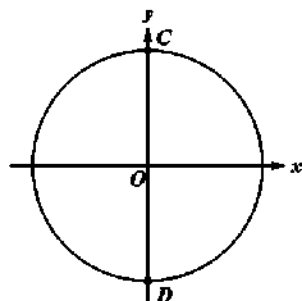


Рис. 1.11

Отношение синуса угла к его косинусу называется тангенсом этого угла и обозначается $\operatorname{tg} \alpha$. Отношение косинуса угла к его синусу называется котангенсом этого угла и обозначается $\operatorname{ctg} \alpha$. Таким образом:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \qquad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Тангенс определён только для таких углов, у которых $\cos \alpha \neq 0$, а котангенс – только для таких углов, у которых $\sin \alpha \neq 0$.

Выясним, для каких углов выполняются эти условия. Чтобы выяснить, для каких углов выполняется условие $\sin \alpha \neq 0$, отметим на тригонометрической окружности точки, ординаты которых равны нулю (рис. 1.10). Это точки $A(1; 0)$ и $B(-1; 0)$. Точка A соответствует углам, радианная мера которых равна 0 или отличается от 0 на целое число полных оборотов, т.е. углом с радианной мерой $\alpha = 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, а точка B соответствует углам, радианная мера которых равна π или отличается от π на целое число полных оборотов, т.е. углом с радианной мерой $\alpha = \pi + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Объединяя эти два случая, можно сказать, что $\sin \alpha = 0$ для таких и только таких углов, радианная мера которых удовлетворяет условию $\alpha = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда следует, что условие $\sin \alpha \neq 0$ выполняется для всех углов $\alpha \neq \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, и только для них.

Аналогично, рассматривая на тригонометрической окружности точки, абсциссы которых равны нулю, т.е. точки $C(0; 1)$ и $D(0; -1)$ (рис. 1.11), установим, что точка C соответствует углам, радианная мера которых равна $\frac{\pi}{2}$ или отличается от $\frac{\pi}{2}$ на целое число полных оборотов, т.е. углам с радианной мерой $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, а точка D соответствует углам, радианная мера которых равна $-\frac{\pi}{2}$ или отличается от $-\frac{\pi}{2}$ на целое число полных оборотов, т.е. углам с радианной мерой $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Объединяя эти два случая, можно сказать, что условие $\cos \alpha \neq 0$ выполняется для всех углов $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, и только для них.

Таким образом, для любого угла α существует синус этого угла, причём единственный, а также существует косинус этого угла, причём единственный. Для любого угла α , такого, что $\cos \alpha \neq 0$ (т.е. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$), существует тангенс этого угла, причём единственный. Для любого угла α , такого, что $\sin \alpha \neq 0$ (т.е. $\alpha \neq \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$), существует котангенс этого угла, причём единственный.

Сказанное выше позволяет говорить, что синус, косинус, тангенс и котангенс являются функциями угла. Их называют *тригонометрическими функциями* этого угла. Подробно мы изучим эти функции позже, в параграфе 1.10, а сейчас будем употреблять словосочетание «тригонометрические функции» для общего названия синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

При решении многих задач оказываются полезными, наряду с тригонометрической окружностью, ось тангенсов и ось котангенсов.

Проведём через точку $A(1; 0)$ тригонометрической окружности прямую, параллельную оси Oy (рис. 1.12). Возьмём на этой прямой за начало отсчёта точку A , единичный отрезок выберем такой же, как на оси Oy и положительное направление выберем тоже как на оси Oy – снизу вверх. В результате получится числовая ось, называемая *осью тангенсов*. Это название объясняется следующим её свойством.

Если α – произвольный угол, такой, что $\cos \alpha \neq 0$, а P_α – соответствующая точка тригонометрической окружности, то координата на оси тангенсов точки её пересечения с прямой, проходящей через точку P_α и центр O тригонометрической окружности, равна $\operatorname{tg} \alpha$ (рис. 1.13).

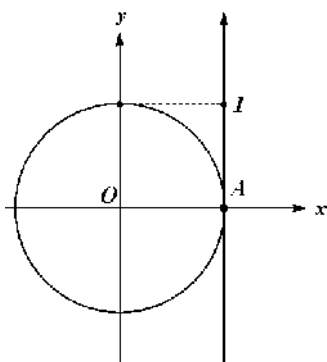


Рис. 1.12

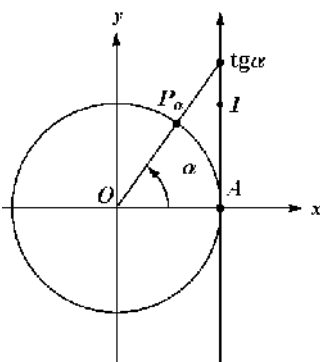


Рис. 1.13

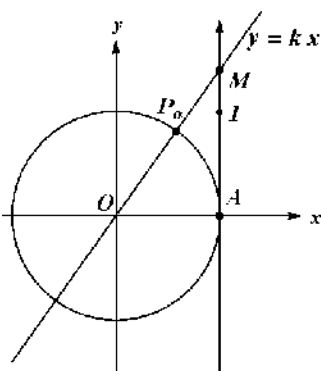


Рис. 1.14

Действительно, если $\cos \alpha \neq 0$, то точка P_α не лежит на оси Oy , и прямая OP_α пересекает ось тангенсов в некоторой точке M (рис. 1.14). Если t – координата точки M на оси тангенсов, то координаты точки M на координатной плоскости xOy таковы: $M(1; t)$. Прямая OM проходит через начало координат, значит, её уравнение имеет вид $y = kx$. Подставляя в это уравнение координаты точки $M(1; t)$, получим, что $t = k$, а подставляя в него координаты точки $P_\alpha(\cos \alpha; \sin \alpha)$, получим, что $\sin \alpha = k \cos \alpha$, или, деля на $\cos \alpha \neq 0$, $k = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$. Но т.к. $t = k$, то доказано, что $t = \operatorname{tg} \alpha$, что и требовалось.

Аналогично вводится ось котангенсов: через точку $C(0; 1)$ тригонометрической окружности проводится прямая, параллельная оси Ox , на этой прямой за начало отсчёта выбирается точка C , единичный отрезок берётся такой же, как на оси Ox , и положительное направление тоже берётся, как на оси Ox – слева направо (рис. 1.15).

Если теперь α – произвольный угол, такой, что $\sin \alpha \neq 0$, а P_α – соответствующая точка тригонометрической окружности, то координата на оси котангенсов точки её пересечения с прямой, проходящей через точку P_α и центр O тригонометрической окружности, равна $\operatorname{ctg} \alpha$ (рис. 1.16).

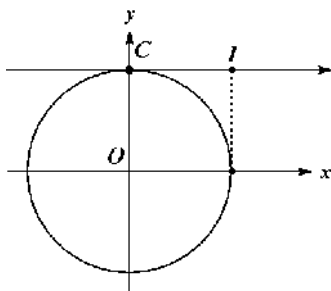


Рис. 1.15

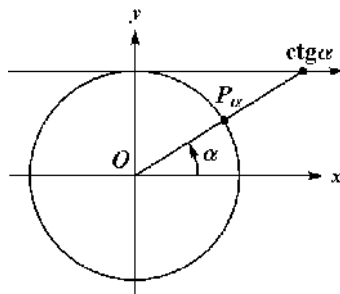


Рис. 1.16

Доказательство этого утверждения аналогично приведённому выше доказательству для оси тангенсов.

Установим основные свойства тригонометрических функций.

Для любого угла α справедливы неравенства
 $-1 \leq \sin \alpha \leq 1, -1 \leq \cos \alpha \leq 1$.

Действительно, и абсцисса, и ордината точки, расположенной на единичной окружности с центром в начале координат, лежат в пределах от -1 до 1 .

Для любого числа u , такого, что $-1 \leq u \leq 1$, существует
 такой угол α , для которого $\sin \alpha = u$.

Если $u = 1$, то единственная точка тригонометрической окружности, имеющая ординату 1 , это точка $C(0; 1)$ (рис. 1.17), а выше было установлено, что точка C соответствует углам, радианная мера которых равна $\frac{\pi}{2}$ или отличается от $\frac{\pi}{2}$ на целое число полных оборотов, т.е. углам с радианной мерой $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Если $u = -1$, то единственная точка тригонометрической окружности, имеющая ординату -1 , это точка $D(0; -1)$ (рис. 1.17), а выше было установлено, что точка D соответствует углам, радианная мера которых равна $-\frac{\pi}{2}$ или отличается от $-\frac{\pi}{2}$ на целое число полных оборотов, т.е. углам с радианной мерой $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

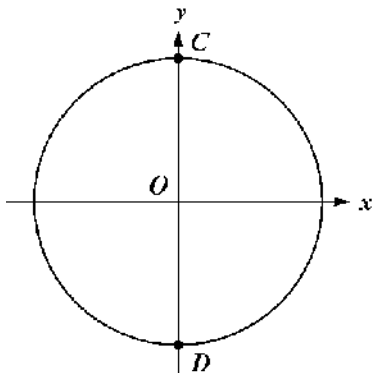


Рис. 1.17

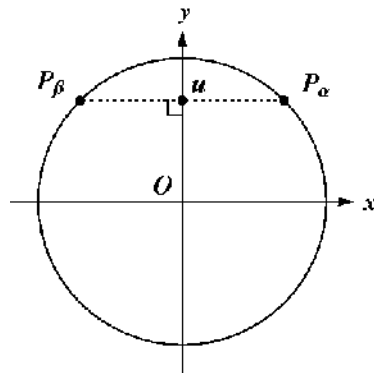


Рис. 1.18

Если $-1 < u < 1$, то возьмём на оси Oy точку с координатой u и проведём через неё прямую, перпендикулярную оси Ox . Эта прямая пересечёт тригонометрическую окружность в двух точках, назовём их P_α и P_β (рис. 1.18). Тогда $\sin \alpha = u$ и $\sin \beta = u$.

Таким образом, утверждение полностью доказано.

Попутно получены два важных соотношения:

$$\sin \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \sin \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Далее, если точка P_α тригонометрической окружности движется против часовой стрелки из положения D в положение C (угол α при этом меняется от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ включительно), то ордината точки P_α увеличивается (от -1 до 1 включительно) (рис. 1.17). По-другому это можно сформулировать так: $\sin \alpha$ возрастает при $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, или так: синус – возрастающая функция на интервале $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Аналогично, если точка P_α тригонометрической окружности движется против часовой стрелки из положения C в положение D (угол α при этом меняется от $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ включительно), то ордината точки P_α уменьшается (от 1 до -1 включительно) (рис. 1.17). По-другому это можно сформулировать так: $\sin \alpha$ убывает при $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, или так: синус – убывающая функция на интервале $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Теперь рассмотрим аналогичные вопросы для косинуса.

Для любого числа v , такого, что $-1 \leq v \leq 1$, существует такой угол α , для которого $\cos \alpha = v$.

Доказательство аналогично соответственному доказательству для синуса.

Если $v = 1$, то единственная точка тригонометрической окружности, имеющая абсциссу 1 , это точка $A(1; 0)$ (рис. 1.19), а выше было установлено, что точка A соответствует углам, радианная мера которых равна 0 или отличается от 0 на целое число полных оборотов, т.е. углам с радианной мерой $\alpha = 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Если $v = -1$, то единственная точка тригонометрической окружности, имеющая абсциссу -1 , это точка $B(-1; 0)$ (рис. 1.19), а выше было установлено, что точка B соответствует углам, радианная мера которых равна π или отличается от π на целое число полных оборотов, т.е. углам с радианной мерой $\alpha = \pi + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

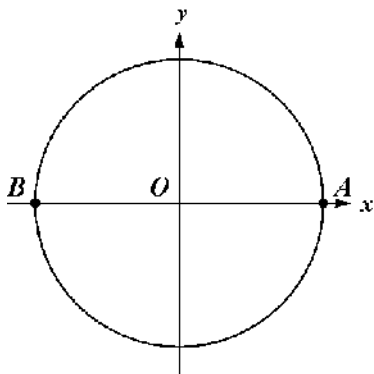


Рис. 1.19

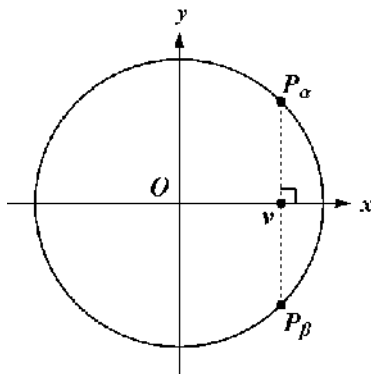


Рис. 1.20

Если $-1 < v < 1$, то возьмём на оси Ox точку с координатой v и проведём через неё прямую, перпендикулярную оси Ox . Эта прямая пересечёт тригонометрическую окружность в двух точках, назовём их P_α и P_β (рис. 1.20). Тогда $\cos \alpha = v$ и $\cos \beta = v$.

Таким образом, утверждение полностью доказано.

Попутно получены два важных соотношения:

$$\cos \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\cos \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Исследуем теперь возрастание и убывание косинуса. Если точка P_α тригонометрической окружности движется против часовой стрелки из положения A в положение B (угол α при этом меняется от 0 до π включительно), то абсцисса точки P_α уменьшается (от 1 до -1 включительно) (рис. 1.19). По-другому это можно сформулировать так: $\cos \alpha$ убывает при $\alpha \in [0; \pi]$, или так: косинус – убывающая функция на интервале $[0; \pi]$.

Аналогично, если точка P_α тригонометрической окружности движется против часовой стрелки из положения B в положение A (угол α при этом меняется от π до 2π включительно), то абсцисса точки P_α увеличивается (от -1 до 1 включительно) (рис. 1.19). По-другому это можно сформулировать так: $\cos \alpha$ возрастает при $\alpha \in [\pi; 2\pi]$, или так: косинус – возрастающая функция на интервале $[\pi; 2\pi]$.

На основании доказанных выше утверждений можно заключить следующее:

$\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ могут принимать любые значения из отрезка $[-1; 1]$
и не могут принимать никаких значений вне этого отрезка.

Выясним теперь, какие значения могут принимать $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$.

Для любого действительного числа u
существует такой угол α , для которого $\operatorname{tg} \alpha = u$.

Если взять на оси тангенсов точку с координатой u и провести через неё прямую, проходящую также через начало координат O , то эта прямая пересечёт тригонометрическую окружность в двух (диаметрально противоположных) точках, назовём их P_α и P_β (рис. 1.21). Тогда $\operatorname{tg} \alpha = u$ и $\operatorname{tg} \beta = u$.

Аналогично с помощью оси котангенсов может быть доказано следующее утверждение:

Для любого действительного числа v
существует такой угол α , для которого $\operatorname{ctg} \alpha = v$.

Таким образом,

$\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$ могут принимать любые действительные значения.

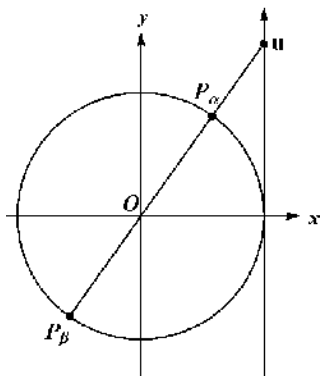


Рис. 1.21

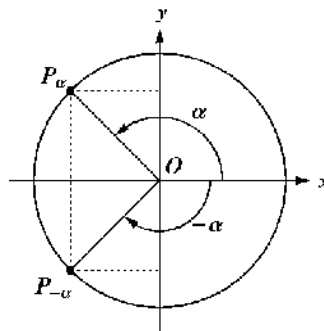


Рис. 1.22

Выясним, как связаны между собой значения тригонометрических функций противоположных углов, т.е. углов α и $-\alpha$. Поскольку точки P_α и $P_{-\alpha}$ симметричны относительно оси абсцисс, то их абсциссы равны, а ординаты являются противоположными числами (рис. 1.22).

Таким образом:

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

$$\text{Если } \cos \alpha \neq 0, \text{ то } \operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Аналогично, если } \sin \alpha \neq 0, \text{ то } \operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Установлены следующие результаты:

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$

Вспоминая известные вам из 8-го класса понятия чётной и нечётной функций, можно сформулировать полученный результат следующим образом:

Косинус является чётной функцией, а синус, тангенс и котангенс – нечётными.

Если α – произвольный угол, то соответствующая ему точка P_α тригонометрической окружности расположена в некоторой четверти координатной плоскости. Принято говорить, что угол α лежит в соответствующей четверти. При этом четыре точки пересечения тригонометрической окружности с координатными осями не относят ни к каким четвертям.

Чтобы выяснить, какие знаки имеют тригонометрические функции углов, лежащих в данной четверти, достаточно вспомнить определения тригонометрических функций. Скажем, для угла α из II четверти абсцисса точки P_α отрицательна, а поскольку эта абсцисса – косинус угла α , то $\cos \alpha < 0$ для углов α из II четверти. Рассуждая аналогичным образом, видим, что для угла α из II четверти ордината точки P_α положительна, а поскольку эта ордината – синус угла α , то $\sin \alpha > 0$ для углов α из II четверти. Зная знаки синуса и косинуса, легко устанавливаем знаки тангенса – частного синуса и косинуса и котангенса – частного косинуса и синуса. Для углов α из II четверти $\operatorname{tg} \alpha < 0$ и $\operatorname{ctg} \alpha < 0$. Понятно, что в любой четверти, знаки тангенса и котангенса одинаковые. Заметим также, что знаки тангенса и котангенса можно определить и с помощью оси тангенсов и оси котангенсов (рис. 1.23).

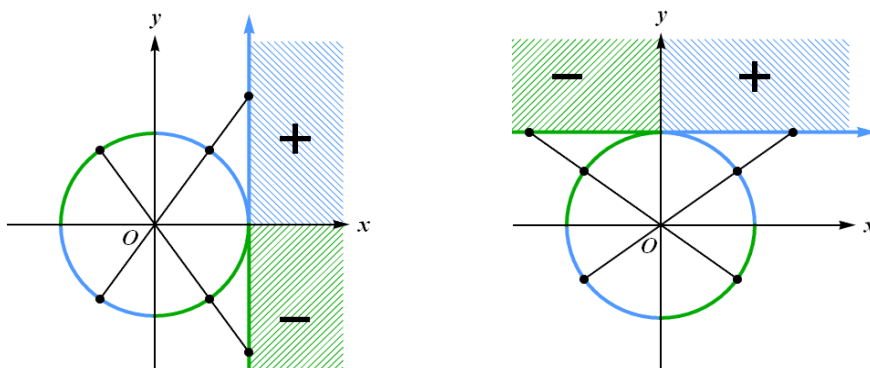


Рис. 1.23

Знаки тригонометрических функций по четвертям указаны на рис. 1.24.

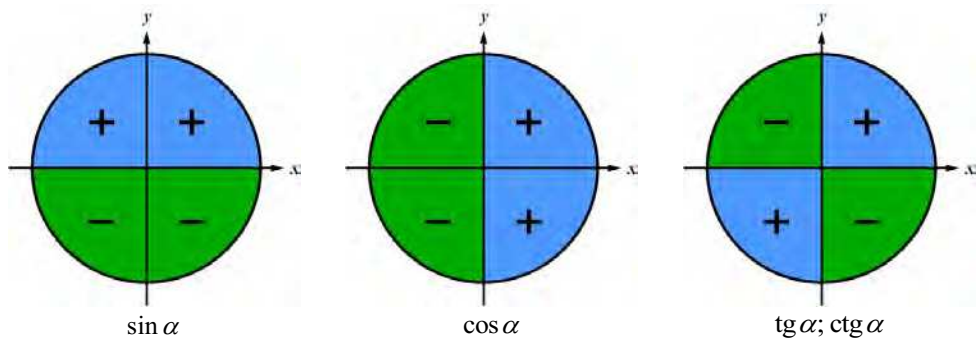


Рис. 1.24

Для любого угла α и любого целого числа n справедливы равенства:

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + 2\pi n) \qquad \cos \alpha = \cos(\alpha + 2\pi n)$$

Справедливость этих равенств объясняется уже известным вам фактом, что при любом целом n точки P_α и $P_{\alpha+2\pi n}$ совпадают, а значит их абсциссы равны и их ординаты равны.

Для любого угла α , такого, что $\cos \alpha \neq 0$, и любого целого числа n справедливо равенство: $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi n)$

Т.к. углы α и $\alpha + \pi n$ отличаются на целое число полных поворотов, то соответствующие им точки тригонометрической окружности P_α и $P_{\alpha+\pi n}$ диаметрально противоположны, причём условие $\cos \alpha \neq 0$ значит, что эти две точки, не лежат на оси Oy . Проходящая через них прямая пересечёт ось тангенсов в некоторой точке, причём эта прямая будет проходить также через центр O тригонометрической окружности (рис. 1.25).

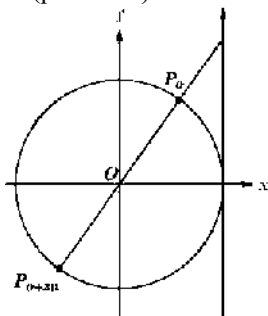


Рис. 1.25

Таким образом, установлено, что $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi n)$.

Более того, внимательный анализ рис. 1.25 показывает, что верно и обратное утверждение:

Два угла имеют одинаковые тангенсы в том и только том случае, когда они отличаются на целое количество полуоборотов:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

С помощью оси котангенсов можно доказать два аналогичных утверждения для котангенса:

Для любого угла α , такого, что $\sin \alpha \neq 0$, и любого целого числа n справедливо равенство: $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + \pi n)$.

Два угла имеют одинаковые котангенсы в том и только том случае, когда они отличаются на целое количество полуоборотов:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Теперь исследуем, как связаны между собой синусы и косинусы углов, отличающихся друг от друга на один полуоборот. Докажем следующее утверждение:

Для любого угла α справедливы равенства:
 $\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin \alpha \qquad \cos(\alpha \pm \pi) = -\cos \alpha$

Действительно, точка $P_{\alpha+\pi}$ может быть получена из точки P_α поворотом на угол π , а точка $P_{\alpha-\pi}$ может быть получена из точки P_α поворотом на угол $-\pi$ относительно начала координат O (рис. 1.26).

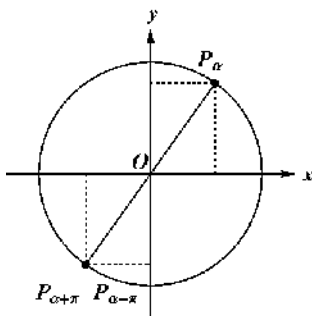


Рис. 1.26

Из курса геометрии 8 класса вы знаете, что такой поворот является центральной симметрией относительно центра поворота. Таким образом, и точка $P_{\alpha+\pi}$, и точка $P_{\alpha-\pi}$ симметричны точке P_α относительно начала координат O , а значит, и абсцисса, и ордината каждой из точек $P_{\alpha+\pi}$ и $P_{\alpha-\pi}$ является противоположным числом соответственно с абсциссой и ординатой точки P_α . А это и значит, что:

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha, \sin(\alpha - \pi) = -\sin \alpha, \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha, \cos(\alpha - \pi) = -\cos \alpha.$$

Очень часто при решении самых разных задач нужно знать значения тригонометрических функций трёх углов из первой четверти: 30° , 45° и 60° , а также углов 0° и 90° – границ первой четверти.

Обычно эти значения записывают в виде таблицы, приведённой ниже.

	0 0°	$\frac{\pi}{6}$ 30°	$\frac{\pi}{4}$ 45°	$\frac{\pi}{3}$ 60°	$\frac{\pi}{2}$ 90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–
ctg	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Очень важно в течение одной – двух минут суметь выдать любое значение тригонометрической функции из этой таблицы. Многим ребятам несложно выучить эту таблицу наизусть и держать её в памяти. Другие ребята предпочитают не помнить её наизусть, а каждый раз быстро выводить то, что нужно, скажем, для углов 30° и 60° рисуя прямоугольный треугольник с соответствующими углами – «половину» равностороннего треугольника, а для угла 45° – равнобедренный прямоугольный треугольник. Есть также ребята, которые используют мнемоническое* правило, позволяющее каждый раз, когда это необходимо, выписывать всю таблицу полностью и работать, глядя на неё. Они сначала выписывают пустую таблицу (только с заголовками строк и столбцов), затем заполняют строку для синуса по

мнемонической* «формуле» $\frac{\sqrt{n}}{2}$, где $n = 0; 1; 2; 3; 4$. После этого они заполняют

* Мнемоническими называют правила, основанные не на смысле запоминаемого материала, а на случайных удачных наблюдениях, делающих запоминание лёгким, – созвучии, совпадении, и.т.д.

строку для косинуса теми же числами, что и строку для синуса, но в обратном порядке, строку для тангенса – частными от деления синусов на косинусы, а строку для котангенса – теми же числами, что и строку для тангенса, но в обратном порядке.

Важно иметь в виду, что некоторые числа из таблицы могут быть записаны и по-

другому: $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

- а) Что называется осью тангенсов ?
- б) Что называется осью котангенсов?

2 Совпадают ли точки тригонометрической окружности, полученные после поворота луча Ox на указанные углы?

- а) 1120° и 400° ; в) 127° и 1307° ; д) 16° и 1096° ;
- б) 1009° и 299° ; г) 1569° и 129° ; е) 1435° и 195° .

3 Совпадают ли точки тригонометрической окружности, полученные после поворота луча Ox на указанные углы?

- а) $\frac{17\pi}{3}$ и $-\frac{7\pi}{3}$; в) $\frac{97\pi}{90}$ и $\frac{437\pi}{90}$; д) $\frac{49\pi}{9}$ и $-\frac{13\pi}{9}$;
- б) $\frac{7\pi}{6}$ и $\frac{55\pi}{6}$; г) $-\frac{5\pi}{9}$ и $\frac{26\pi}{3}$; е) $\frac{79\pi}{60}$ и $\frac{439\pi}{60}$.

4 Найдите синус и косинус угла.

- а) 810° ; в) 4680° ; д) 6210° ;
- б) 1530° ; г) 2430° ; е) 4140° .

5 Найдите синус и косинус угла.

- а) 5π ; в) $\frac{109\pi}{2}$; д) 37π ;
- б) $\frac{51\pi}{2}$; г) 56π ; е) $\frac{155\pi}{2}$.

6 Найдите синус и косинус угла α .

- а) $\alpha = 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$; в) $\alpha = \pi + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$;
- б) $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$; г) $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

7 Укажите все углы α , для которых выполняются соотношения.

- а) $\sin \alpha = 0$; в) $\sin \alpha = 1$; д) $\sin \alpha = -1$;
б) $\cos \alpha = 0$; г) $\cos \alpha = 1$; е) $\cos \alpha = -1$.

8 Определите знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла.

- а) 200° ; в) -77° ; д) 83° ;
б) 108° ; г) -228° ; е) 318° .

9 Определите знаки синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла.

- а) $\frac{7\pi}{12}$; в) $-\frac{8\pi}{5}$; д) $\frac{13\pi}{45}$;
б) $\frac{137\pi}{90}$; г) $\frac{41\pi}{80}$; е) $-\frac{37\pi}{20}$.

10 С помощью оси тангенсов укажите знак $\operatorname{tg} \alpha$.

- а) 290° ; в) 137° ; д) -276° ;
б) $\frac{5\pi}{7}$; г) 4 ; е) $-\frac{8\pi}{9}$.

11 С помощью оси котангенсов укажите знак $\operatorname{ctg} \alpha$.

- а) 330° ; в) 199° ; д) 91° ;
б) $\frac{4\pi}{7}$; г) 5 ; е) $-\frac{2\pi}{23}$.

12 Существует ли такой угол α , для которого выполняется указанное равенство?

- а) $\sin \alpha = \sqrt{2}$; г) $\cos \alpha = 2 - \sqrt{7}$; ж) $\operatorname{tg} \alpha = -2\pi$;
б) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$; д) $\cos \alpha = \frac{3\pi}{20}$; з) $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{7}-1$.
в) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{26}}{5}$; е) $\cos \alpha = \frac{10-\sqrt{10}}{7}$; и) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{123}{321}$.

13 Упростите выражение.

- а) $2 \cos 30^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ + 4 \sin 45^\circ$; в) $3 \cos 45^\circ + 2 \operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ$;
б) $3 \sin 60^\circ + 5 \operatorname{tg} 45^\circ - 2 \cos 45^\circ$; г) $5 \operatorname{ctg} 30^\circ - 2 \operatorname{tg} 30^\circ + \sin 45^\circ$.

14 Упростите выражение.

- а) $5 \cos \frac{\pi}{3} - 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - 3 \sin \frac{\pi}{6}$; в) $\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} - 2 \sin \frac{\pi}{3}$;
б) $-3 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} - 5 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + 4 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$; г) $\cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}$.

15 Упростите выражение.

- а) $3\sin(-30^\circ) - \operatorname{tg}(-45^\circ) + 2\cos 60^\circ$; в) $4\cos(-60^\circ) - 3\operatorname{tg} 60^\circ - 3\sin 60^\circ$;
б) $5\sin 45^\circ - \operatorname{ctg}(-30^\circ) - 2\sin(-30^\circ)$; г) $\operatorname{tg}(-45^\circ) + 5\operatorname{ctg}(-60^\circ) + 4\cos(-30^\circ)$.

16 Упростите выражение.

- а) $\cos \frac{\pi}{6} - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; в) $-3\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 2\cos \frac{\pi}{4} + 4\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;
б) $3\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - 4\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 2\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; г) $3\sin \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

II

17 Существует ли такой угол α , для которого выполняется указанное равенство?

- а) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$; в) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\pi}$; д) $\sin \alpha = 1 + 2\cos 3$;
б) $\cos \alpha = \operatorname{tg} \frac{4\pi}{7}$; г) $\cos \alpha = 9(\sqrt{101} - \sqrt{99})$; е) $\cos \alpha = \sqrt{5 + \sqrt{6}} - \sqrt{7}$.

1.3. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла

Словами, входящими в заголовок данного параграфа, принято называть следующие шесть формул:

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;	$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$;
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$;	$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$;
$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$;	$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Первая из этих формул справедлива для любого угла α , а остальные – с соответствующими ограничениями. Скажем, вторая и пятая формулы справедливы для любого угла α , такого, что $\cos \alpha \neq 0$, третья и шестая – для любого угла α , такого, что $\sin \alpha \neq 0$, а четвёртая – для любого угла α , такого, что и $\sin \alpha \neq 0$, и $\cos \alpha \neq 0$.

Начнём с доказательства первой формулы.

Для любого угла α справедливо равенство
 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Это равенство часто называют *основным тригонометрическим тождеством*.

Пусть α – произвольный угол, а $P_\alpha(x; y)$ – соответствующая ему точка тригонометрической окружности. Тогда $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$. Поскольку центр тригонометрической окружности – точка $O(0; 0)$, а радиус равен 1, то она задаётся уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Подставляя в это уравнение $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$, получим $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, что и требовалось доказать.

Равенства $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ и $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ являются определениями тангенса и котангенса и поэтому в доказательстве не нуждаются.

Если же перемножить эти два равенства, то получим:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1, \text{ т.е. четвёртую формулу.}$$

Пятая формула доказывается с помощью второй и первой следующим образом:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = 1 + \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Аналогично доказывается и шестая формула:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 = 1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

С помощью доказанных шести формул можно решать большое количество задач.

Пример 1. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{5} - 2$.

Решение. Т.к. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$, то:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \frac{\sqrt{5} + 2}{5 - 4} = \sqrt{5} + 2.$$

Пример 2. Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Решение. Т.к. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, то $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$.

Отсюда получаем ответ: $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ или $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$.

Пример 3. Найдите $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. Так же, как в предыдущем примере, основываясь на основном тригонометрическом тождестве $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, получим сначала, что $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$, откуда $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ или $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. Но на сей раз у нас имеется ещё дополнительное условие $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, из которого заключаем, что $\cos \alpha < 0$ и поэтому $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$.

Пример 4. Найдите $\sin \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = 2$ и $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

Решение. Применим формулу $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, записав её для удобства «справа налево»: $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + 4 = 5$ откуда получим, что $\sin^2 \alpha = \frac{1}{5}$. Поскольку при $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, т.е. в III четверти $\sin \alpha < 0$, то $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Можно оставить ответ в таком виде, а можно освободиться от иррациональности в знаменателе и записать: $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Анализ рассмотренных выше примеров показывает, что зная значение одной из тригонометрических функций, мы не можем, вообще говоря*, однозначно восстановить значения всех остальных – мы можем сделать это лишь с точностью до знака. Если же известно, в какой четверти находится угол, то зная одну тригонометрическую функцию этого угла, мы можем однозначно определить значения всех остальных его тригонометрических функций.

Пример 5. Докажите тождество: $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$.

Решение. Составим разность левой и правой частей и преобразуем её:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha &= \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 0. \end{aligned}$$

Поскольку разность левой и правой частей тождественно равна нулю, тождество доказано.

* В некоторых исключительных случаях это возможно для углов, которым соответствуют точки пересечения тригонометрической окружности с координатными осями. Скажем, зная, что $\sin \alpha = 1$, можно установить, что $\cos \alpha = 0$, $\operatorname{ctg} \alpha = 0$, а $\operatorname{tg} \alpha$ не существует.

Пример 6. Упростите выражение: $\left(1 + \frac{1}{\cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha\right) \left(1 - \frac{1}{\cos \alpha} + \operatorname{tg} \alpha\right)$.

Решение. При преобразовании тригонометрических выражений важно, наряду с тригонометрическими формулами, использовать алгебраические формулы и приёмы.

Если записать преобразуемое выражение в виде $\left((1 + \operatorname{tg} \alpha) + \frac{1}{\cos \alpha}\right) \left((1 + \operatorname{tg} \alpha) - \frac{1}{\cos \alpha}\right)$, то видно, что это произведение суммы выражений $(1 + \operatorname{tg} \alpha)$ и $\frac{1}{\cos \alpha}$ и их разности, т.е. разность квадратов:

$$\begin{aligned} & \left((1 + \operatorname{tg} \alpha) + \frac{1}{\cos \alpha}\right) \left((1 + \operatorname{tg} \alpha) - \frac{1}{\cos \alpha}\right) = (1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 - \frac{1}{\cos^2 \alpha} = \\ & = 1 + 2\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha - (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 2\operatorname{tg} \alpha, \text{ поскольку } \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{aligned}$$

Пример 7. Найдите $\sin \alpha \cos \alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{2}{3}$.

Решение. Записав данное в условии равенство в виде $\frac{2}{3} = \sin \alpha - \cos \alpha$, возведём обе его части в квадрат:

$$\frac{4}{9} = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Отсюда $2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ и $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{5}{18}$.

Пример 8. Найдите $\frac{2 \sin \alpha + 5 \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 4 \cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = 1,5$.

Решение. Поскольку $\operatorname{tg} \alpha$ существует, можно утверждать, что $\cos \alpha \neq 0$, а значит, мы можем разделить числитель и знаменатель нашей дроби на $\cos \alpha$:

$$\frac{2 \sin \alpha + 5 \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 4 \cos \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 5 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{3 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 4 \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha + 5}{3 \operatorname{tg} \alpha - 4} = \frac{2 \cdot 1,5 + 5}{3 \cdot 1,5 - 4} = \frac{8}{0,5} = 16.$$

Имеется и другое решение этой задачи. Т.к. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, то $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1,5$, откуда $\sin \alpha = 1,5 \cos \alpha$.

Подставляя в преобразуемое выражение, получим:

$$\frac{2 \sin \alpha + 5 \cos \alpha}{3 \sin \alpha - 4 \cos \alpha} = \frac{2 \cdot 1,5 \cos \alpha + 5 \cos \alpha}{3 \cdot 1,5 \cos \alpha - 4 \cos \alpha} = \frac{8 \cos \alpha}{0,5 \cos \alpha} = 16.$$

Н

- 1) а) Верно ли, что тангенс и котангенс одного и того же угла – взаимно противоположные числа? Обоснуйте свой ответ.
б) Верно ли, что тангенс и котангенс одного и того же угла – взаимно обратные числа? Обоснуйте свой ответ.
- 2) а) Сформулируйте основное тригонометрическое тождество.
б) Докажите основное тригонометрическое тождество.
в) При выводе каких из изученных в параграфе 1.3 формул используется основное тригонометрическое тождество?
- 3) Верно ли, что зная значение одной тригонометрической функции угла, можно однозначно определить значения всех остальных? Обоснуйте свой ответ.
- 4) Найдите $\operatorname{ctg} \alpha$, если известно, что:
а) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{2}{3}$; б) $\operatorname{ctg} \alpha = 4$; в) $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{3}$.
- 5) Найдите $\operatorname{ctg} \alpha$, если известно, что:
а) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\operatorname{tg} \alpha = -2\frac{3}{5}$; в) $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{10}$.
- 6) Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.
- 7) Найдите $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 4$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.
- 8) Найдите $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.
- 9) Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{9}{10}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
- 10) Найдите $\sin \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.
- 11) Найдите $\cos \alpha$, если $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{3}{4}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.
- 12) Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

13 Найдите $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

14 Найдите $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = m$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

15 Найдите $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\cos \alpha = z$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

16 Упростите выражение.

а) $\frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$; в) $\frac{2 \sin^2 \alpha - 1}{2 \cos^2 \alpha - 1}$;
 б) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha (2 \sin^2 \alpha + \operatorname{tg} \alpha)}{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}$; г) $\frac{(\cos^2 \alpha + \cos \alpha)(\cos^2 \alpha - \cos \alpha)}{(\sin^2 \alpha + \sin \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha)}$.

17 Упростите выражение.

а) $\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\sin^4 \alpha} - \operatorname{ctg}^2 \alpha$; в) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} + \operatorname{tg}^3 \alpha$;
 б) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha - 1}{1 - \sin^2 \alpha}$; г) $2 - \frac{1 - \sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha}$.

18 Докажите тождество.

а) $\frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$; в) $\frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(2 \sin \alpha \cos \alpha + 1)}{(\cos \alpha + \sin \alpha)(1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha)} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$;
 б) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha}$; г) $2 \frac{\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \operatorname{tg}^2 \alpha$.

19 Докажите тождество.

а) $\cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha}{8} + \frac{7}{8 \cos^2 \alpha} - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha + \frac{1}{8} \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha$;
 б) $\frac{\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \sin^8 \alpha - \cos^8 \alpha}{\sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha} = 2$;
 в) $8 \sin^4 \alpha + 6 \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 7 + \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha$;
 г) $8(\cos^6 \alpha + \sin^6 \alpha) + 18 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = 3(\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) + 5$.

П

20 Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

21 Найдите $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = -2$ и $0 < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

22 Найдите $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

23 Найдите $\sin \alpha \cos \alpha$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2}{3}$.

24 Найдите $\sin \alpha + \cos \alpha$, если $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{3}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

25 Найдите $\cos \alpha - \sin \alpha$, если $\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

26 Найдите $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = 0,1$.

27 Известно, что $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 4$. Найдите:

а) $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$; б) $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$; в) $\operatorname{tg}^4 \alpha + \operatorname{ctg}^4 \alpha$.

28 Упростите выражение.

а) $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{1 - \sin \alpha \cos \alpha}$; в) $\frac{3 \operatorname{ctg} \alpha \cos^3 \alpha \sin \alpha - 18 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 5 + 3 \cos \alpha \sin^3 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{(\operatorname{ctg}^3 \alpha + \operatorname{tg}^3 \alpha) \cos^3 \alpha \sin \alpha}$;

б) $\frac{\cos^4 \alpha (1 + \operatorname{tg}^4 \alpha - 6 \operatorname{tg}^2 \alpha)}{4 \cos^4 \alpha + 4 \sin^4 \alpha - 3}$; г) $\frac{5 + 3 \sin \alpha (\operatorname{ctg} \alpha + 2) + \operatorname{tg} \alpha (10 + 3 \sin \alpha + 5 \operatorname{tg} \alpha)}{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2}$.

29 Найдите $\frac{4 \sin \alpha + 7 \cos \alpha}{2 \sin \alpha + 5 \cos \alpha}$, если $\operatorname{ctg} \alpha = 1,5$.

30 Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\frac{2 \sin \alpha - \cos \alpha}{3 \sin \alpha + 4 \cos \alpha} = \frac{3}{7}$.

М

31 Докажите, что для всех допустимых значений α справедливо неравенство $|\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha| \geq 2$.

32 Найдите наименьшее и наибольшее значение выражения $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

1.4. Формулы сложения

Формулами сложения называются формулы, выражающие тригонометрические функции алгебраической суммы двух углов через тригонометрические функции самих этих двух углов. Более точное название этих формул – формулы сложения углов.

По сложившейся традиции к формулам сложения относят шесть формул: синус суммы, синус разности, косинус суммы, косинус разности, тангенс суммы и тангенс разности.

$$\text{Для любых углов } \alpha \text{ и } \beta \text{ справедливо равенство:} \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Можно сформулировать этот результат и по-другому:

Косинус разности двух углов равен произведению косинусов этих углов, сложенному с произведением их синусов.

Докажем это утверждение. Рассмотрим на тригонометрической окружности точки P_0 и P_β . После выполнения поворота на угол $\alpha - \beta$ точка P_0 перейдёт в точку $P_{\alpha-\beta}$, а точка P_β перейдёт в точку P_α , поскольку $\beta + (\alpha - \beta) = \alpha$. Т.к. при повороте расстояния между точками сохраняются, то отрезки $P_0P_{\alpha-\beta}$ и $P_\beta P_\alpha$ равны друг другу (рис. 1.27).

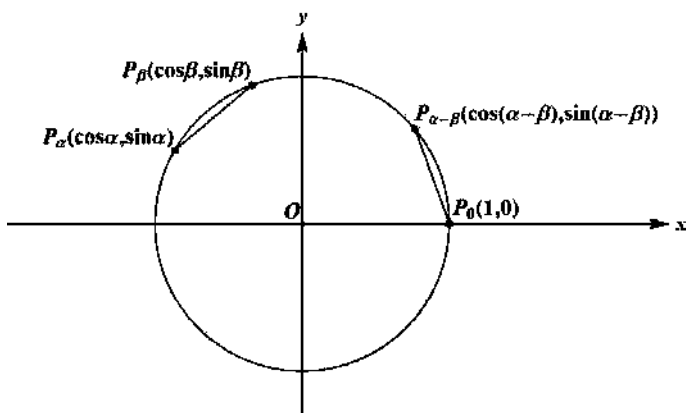


Рис. 1.27

Запишем координаты точек, о которых идёт речь:

$$P_0(1; 0), P_\alpha(\cos \alpha; \sin \alpha), P_\beta(\cos \beta; \sin \beta), P_{\alpha-\beta}(\cos(\alpha - \beta); \sin(\alpha - \beta)).$$

По формуле расстояния между точками координатной плоскости имеем:

$$P_0 P_{\alpha-\beta} = \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha - \beta)},$$

$$P_\beta P_\alpha = \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2}.$$

Поскольку корни равны, то равны и подкоренные выражения:

$$(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha - \beta) = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2, \text{ или}$$

$$\cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta) =$$

$$= \cos^2 \alpha - 2\cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta.$$

Применяя один раз в левой части и два раза в правой части основное тригонометрическое тождество, получим:

$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2\cos \alpha \cos \beta - 2\sin \alpha \sin \beta.$$

Вычитая из обеих частей равенства 2, а затем деля обе части на -2 , получим:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Формула косинуса разности доказана.

Из доказанной формулы косинуса разности, используя чётность косинуса и нечётность синуса, можно легко получить формулу косинуса суммы:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

Полученный результат может быть сформулирован в виде:

Для любых углов α и β справедливо равенство:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

или в виде:

Косинус суммы двух углов равен произведению косинусов этих углов, без произведения их синусов.

Взяв в формуле косинуса разности $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ и учитывая, что $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, получим:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos \frac{\pi}{2} \cos \beta + \sin \frac{\pi}{2} \sin \beta = \sin \beta.$$

Подставив $\beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$ в полученную формулу $\sin \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$, получим:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\right)=\cos\gamma.$$

Итак, доказаны формулы

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

(впрочем, уже известные вам из курса геометрии 9 класса).

Основываясь на этих формулах, можно получить формулы сложения для синуса:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta, \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.\end{aligned}$$

Доказательство первой формулы получается так:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta.\end{aligned}$$

Вторую формулу можно получить аналогично из формулы косинуса суммы, но ещё проще получить её из только что доказанной формулы, используя чётность косинуса и нечётность синуса:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.$$

Формулы сложения углов для тангенса имеют вид:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

Для доказательства каждой из этих формул запишем тангенс в виде частного синуса и косинуса, применим соответственные формулы сложения для синуса и косинуса, после чего разделим числитель и знаменатель полученной дроби на $\cos\alpha \cos\beta$ (разумеется, делать это можно при условии, что это произведение отлично от нуля). Скажем, для первой из выписанных формул это будет выглядеть так:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}}{\frac{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta}} =$$

$$= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Вторая формула доказывается совершенно аналогично.

Обе формулы сложения для тангенса нужно использовать крайне аккуратно, т.к. для каждой из них область определения правой и левой частей не совпадают.

Точно так же, как были выведены формулы для тангенса суммы и тангенса разности, можно вывести формулы для котангенса суммы и котангенса разности. По сложившейся традиции первые две входят в обязательный набор формул сложения, а вторые две – нет. Вы сможете вывести формулы для котангенса суммы и котангенса разности, решая одно из заданий к данному параграфу.

Пример 1. Вычислите $\sin 75^\circ$.

Решение. Поскольку угол 75° можно представить в виде суммы двух табличных углов: $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$, то $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Пример 2. Вычислите $\operatorname{tg} 15^\circ$.

Решение. Угол 15° можно представить в виде разности двух табличных углов, к тому же двумя разными способами: $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ или $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$. Будем иметь для второго способа:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 15^\circ &= \operatorname{tg}(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ}{1 + \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Вторая часть решения относилась не к тригонометрии, а к преобразованию иррациональных выражений.

Пример 3. Упростите выражение $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta$.

Решение.

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta} = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}.$$

Действуя так же, как в разобранным примере, можно упростить и другие алгебраические суммы, в которых слагаемыми являются два тангенса, два котангенса или тангенс и котангенс: нужно выразить их через синусы и косинусы, привести к общему знаменателю, а затем применить в числителе нужную формулу сложения.

Пример 4. Докажите тождество: $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$.

Решение. Преобразуем правую часть с помощью формулы синуса суммы, принимая во внимание, что $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right) = \cos \alpha + \sin \alpha.$$

Т.к. получили левую часть, то тождество доказано.

Н

- 1 а) Запишите формулы косинуса суммы и косинуса разности.
б) Докажите формулы косинуса суммы и косинуса разности.

- 2 а) Запишите формулы синуса суммы и синуса разности.
б) Докажите формулы синуса суммы и синуса разности.

- 3 а) Запишите формулы тангенса суммы и тангенса разности.
б) Докажите формулы тангенса суммы и тангенса разности.

- 4 Найдите с помощью формул сложения.

- а) $\cos 150^\circ$; в) $\cos 240^\circ$; д) $\cos 330^\circ$;
б) $\sin 210^\circ$; г) $\sin 135^\circ$; е) $\sin 315^\circ$.

- 5 Найдите с помощью формул сложения.

- а) $\cos \frac{2\pi}{3}$; в) $\cos \frac{5\pi}{4}$; д) $\cos \frac{5\pi}{6}$;
б) $\sin \frac{3\pi}{4}$; г) $\sin \frac{5\pi}{3}$; е) $\sin \frac{11\pi}{6}$.

- 6 Вычислите, не пользуясь таблицами и калькулятором.

- а) $\cos 50^\circ \cos 40^\circ - \sin 50^\circ \sin 40^\circ$; г) $\sin(-43^\circ) \cos 88^\circ + \cos(-43^\circ) \sin 88^\circ$;
б) $\sin 20^\circ \cos 10^\circ + \sin 10^\circ \cos 20^\circ$; д) $\cos 11^\circ \cos 19^\circ - \sin 19^\circ \sin 11^\circ$;
в) $\cos 95^\circ \cos(-50^\circ) - \sin 95^\circ \sin(-50^\circ)$; е) $\sin 17^\circ \cos 43^\circ + \sin 43^\circ \cos 17^\circ$.

- 7 Вычислите, не пользуясь таблицами и калькулятором.

- а) $\frac{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ}{1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 25^\circ}$; в) $\frac{\operatorname{tg}(-13^\circ) + \operatorname{tg} 73^\circ}{1 - \operatorname{tg} 73^\circ \operatorname{tg}(-13^\circ)}$;
б) $\frac{1 + \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 10^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ}$; г) $\frac{1 + \operatorname{tg} 33^\circ \operatorname{tg} 78^\circ}{\operatorname{tg} 78^\circ - \operatorname{tg} 33^\circ}$.

8 Вычислите, не пользуясь таблицами и калькулятором.

- а) $\sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{14} + \cos \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{14}$; г) $\cos \left(-\frac{19\pi}{36} \right) \cos \frac{7\pi}{9} - \sin \frac{7\pi}{9} \sin \left(-\frac{19\pi}{36} \right)$;
 б) $\cos \frac{8\pi}{51} \cos \frac{3\pi}{17} - \sin \frac{8\pi}{51} \sin \frac{3\pi}{17}$; д) $\sin \left(-\frac{22\pi}{15} \right) \cos \frac{9\pi}{5} + \cos \left(-\frac{22\pi}{15} \right) \sin \frac{9\pi}{5}$;
 в) $\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{42} + \sin \frac{\pi}{42} \cos \frac{\pi}{7}$; е) $-\sin \frac{\pi}{20} \sin \frac{\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{20}$.

9 Вычислите, не пользуясь таблицами и калькулятором.

- а) $\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{11\pi}{24}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \operatorname{tg} \frac{11\pi}{24}}$; в) $\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{11} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{66}}{\operatorname{tg} \frac{5\pi}{66} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{11}}$;
 б) $\frac{\operatorname{tg} \frac{2\pi}{5} \operatorname{tg} \left(-\frac{11\pi}{15} \right) - 1}{\operatorname{tg} \left(-\frac{11\pi}{15} \right) + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5}}$; г) $\frac{\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}}{1 + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}}$.

10 Упростите выражение.

- а) $\sin(\alpha + \beta) - \cos \alpha \sin \beta$; в) $\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$;
 б) $\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta$; г) $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$.

11 Упростите выражение.

- а) $\sin 4\alpha \cos \alpha - \cos 4\alpha \sin \alpha$; в) $\frac{\operatorname{tg} 7\alpha - \operatorname{tg} 6\alpha}{\operatorname{tg} 6\alpha \operatorname{tg} 7\alpha + 1}$;
 б) $\cos \alpha \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \sin \alpha$; г) $\frac{\sin 2\alpha \cos 3\alpha + \cos 2\alpha \sin 3\alpha}{\cos 6\alpha \cos \alpha + \sin 6\alpha \sin \alpha}$.

12 Упростите выражение.

- а) $\cos(60^\circ - \alpha) - \sin(30^\circ - \alpha)$; в) $\cos(30^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ + \alpha)$;
 б) $\cos(45^\circ + \alpha) - \sin(45^\circ - \alpha)$; г) $\sin(60^\circ + \alpha) + \sin(60^\circ - \alpha)$.

13 Упростите выражение.

- а) $\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha$;
 б) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$; г) $\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha)$.

14 Найдите значения выражения при указанных условиях.

а) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

б) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{5}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

в) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$, если $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

г) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, если $\sin\alpha = \frac{9}{11}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

П

15 Найдите $\cos(\alpha + \beta)$, если $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\sin\beta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

16 Найдите $\cos(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{4}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

17 Найдите $\sin(\alpha + \beta)$, если $\sin\alpha = \frac{1}{6}$, $\sin\beta = \frac{5}{6}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

18 Найдите $\sin(\alpha - \beta)$, если $\cos\alpha = -\frac{4}{7}$, $\cos\beta = -\frac{1}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

19 Докажите тождество.

а) $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$; б) $\frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)} = -\operatorname{ctg}\alpha$;

в) $\frac{\cos\alpha \cos\beta - \cos(\alpha - \beta)}{\cos\alpha \cos\beta + \cos(\alpha - \beta)} = -\frac{2\sin\alpha \sin\beta}{3\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}$;

г) $\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta) + \sin\alpha \cos\beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) + 2\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta) + 3\sin(\alpha + \beta)}$.

20 Упростите выражение.

а) $\sin 4\alpha \cos \alpha - \sin 5\alpha$;

в) $\sin 11\alpha \cos 9\alpha - \sin 2\alpha$;

б) $\cos 7\alpha - \sin 9\alpha \sin 2\alpha$;

г) $\cos 10\alpha - \cos 7\alpha \cos 3\alpha$.

21 Упростите выражение.

а) $\frac{\sqrt{3} \cos \alpha - 2 \sin(60^\circ + \alpha)}{\sqrt{3} \sin \alpha + 2 \cos(60^\circ + \alpha)}$;

в) $\frac{2 \cos(a + 30^\circ) + \sin \alpha}{\sqrt{3} \cos \alpha - 2 \cos(a - 30^\circ)}$;

б) $\frac{\cos \alpha - 2 \cos(30^\circ - \alpha)}{\cos \alpha - 2 \sin(\alpha + 30^\circ)}$;

г) $\frac{2 \sin(a + 30^\circ) - \sqrt{3} \cos \alpha}{2 \sin(a + 30^\circ) - \cos \alpha}$.

М

22 Найдите наименьшее и наибольшее значение выражения.

а) $\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$;

в) $\sqrt{3} \sin \alpha - \cos \alpha$;

б) $\sin \alpha + \cos \alpha$;

г) $\cos \alpha - \sin \alpha$.

23 Выведите формулы сложения для котангенса.

1.5. Формулы двойного угла и следствия из них

Двойным углом для данного угла β называется угол 2β . Точно так же для данного угла β определяются *тройной угол* 3β , *четверной угол* 4β и другие *кратные углы*, т.е. углы вида $n\beta$, где n – натуральное число, $n \geq 2$. Сам угол β при этом часто называется *одинарным углом*.

В этом параграфе мы будем иметь дело с двойными углами.

Двойной угол – относительное понятие. Каждый угол α является двойным – для угла $\frac{\alpha}{2}$. Если величина угла – положительное число, то можно сказать, что угол является двойным для угла, в два раза меньшего. Скажем, угол 20° является двойным для угла 10° , угол 10° является двойным для угла 5° , и т.д.

Основными формулами двойного угла являются следующие три формулы:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha ;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha ;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} .$$

Каждая из них выводится одним и тем же рассуждением: берём формулу для синуса, косинуса или тангенса суммы $\alpha + \beta$ соответственно и подставляем в неё $\beta = \alpha$:

1) Подставляя $\beta = \alpha$ в формулу $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, получим:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

2) Подставляя $\beta = \alpha$ в формулу $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, получим:

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

3) Подставляя $\beta = \alpha$ в формулу $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$, получим:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Заметим, что формулы синуса и косинуса двойного угла справедливы для всех углов α , а формула тангенса двойного угла – нет. Более того, область определения правой и левой частей этой формулы неодинаковы, что приводит к необходимости крайне аккуратного и внимательного её применения.

Из трёх основных формул двойного угла можно получить несколько важных следствий.

Из формулы синуса двойного угла $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ при прочтении её справа налево легко получается полезная формула для преобразования произведения синуса на косинус одного и того же угла:

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha.$$

В формуле косинуса двойного угла $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ можно вместо $\cos^2 \alpha$ подставить его выражение через $\sin^2 \alpha$, полученное из основного тригонометрического тождества: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$. В результате получим формулу, которая выражает косинус двойного угла через синус одинарного:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (1 - \sin^2 \alpha) - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

Аналогично можно получить формулу, которая выражает косинус двойного угла через косинус одинарного:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

Выпишем ещё раз эти две важные формулы:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha; \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1.$$

Заметим, что синус двойного угла, в отличие от косинуса, не может быть однозначно выражен через один лишь синус или один лишь косинус одинарного угла.

Но для синуса двойного угла, кроме основной формулы, в которой он выражается через произведение синуса и косинуса одинарных углов, могут быть получены формулы, в которых он выражается через сумму или через разность синуса и косинуса одинарных углов.

Преобразуем выражение $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2$ с помощью формулы квадрата суммы:

$$\begin{aligned}(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 &= \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + \sin 2\alpha.\end{aligned}$$

На последнем шаге мы воспользовались основным тригонометрическим тождеством и основной формулой синуса двойного угла.

Таким образом, получена формула:

$$1 + \sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2,$$

которую можно трактовать как ещё одну формулу синуса двойного угла. Заметим, что для простоты запоминания её обычно записывают именно в таком виде, как сделано выше, не перенося 1 в правую часть, хотя при желании это можно сделать и записать формулу в виде:

$$\sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1.$$

Аналогично, основываясь на преобразовании выражения $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2$ с помощью формулы квадрата разности:

$$\begin{aligned}(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 &= \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = \\ &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 - \sin 2\alpha,\end{aligned}$$

получаем ещё одну формулу для синуса двойного угла:

$$1 - \sin 2\alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2.$$

Обсудим ещё несколько полезных формул.

Запишем формулу косинуса двойного угла $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$, после чего выразим из неё $\sin^2 \alpha$. Получим: $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$.

Аналогично, выразив $\cos^2 \alpha$ из формулы косинуса двойного угла $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$, получим: $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$.

Выведенные две формулы называются *формулами понижения степени*. Они позволяют выражать квадраты синуса и косинуса через первую степень косинуса двойного угла. Выпишем эти формулы ещё раз:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \qquad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

Если переписать эти две формулы соответственно в виде

$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha \text{ и } 1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha,$$

а затем сделать замену $2\alpha = x$, то получим две формулы:

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}, \qquad 1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2},$$

позволяющие утверждать: «конструкции $1 \pm \cos x$ являются полными квадратами» и с успехом использовать эту информацию во многих ситуациях.

Пример 1. Упростить выражение $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$.

Решение. Знание того факта, что $1 - \cos x$ есть полный квадрат позволяет представить числитель дроби в виде произведения, что полезно с точки зрения

возможного сокращения этой дроби. Далее, записав $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin x}$ и увидев, что

в числителе возник угол $\frac{x}{2}$, естественно попробовать перейти к этому углу и в знаменателе. Это оказывается возможным, поскольку стоящий там угол x является

двойным для угла $\frac{x}{2}$. Получим, таким образом: $\frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin x} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Заметим, что мы не только успешно упростили предложенное выражение, но по сути, вывели формулу тангенса половинного угла: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$. Подробнее о формулах половинного угла речь будет идти позже, в параграфе 1.8.

Ещё одна распространённая ситуация, в которой с успехом используется знание того факта, что конструкции $1 \pm \cos x$ являются полными квадратами, — когда эти конструкции стоят под знаком квадратного корня.

Пример 2. Упростите выражение $2 \cos \alpha + \sqrt{2 \cos 2\alpha + 2}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Если вынести множитель 2 в подкоренном выражении за скобки, то получим в скобках выражение $1 + \cos 2\alpha$, являющееся полным квадратом, поэтому:

$$\sqrt{2 \cos 2\alpha + 2} = \sqrt{2(\cos 2\alpha + 1)} = \sqrt{4 \cos^2 \alpha} = 2|\cos \alpha|.$$

Поскольку $\cos \alpha < 0$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, далее будем иметь:

$$2 \cos \alpha + 2|\cos \alpha| = 2 \cos \alpha - 2 \cos \alpha = 0.$$

Аналогично сделанной ранее замене $2\alpha = x$ в формулах косинуса двойного угла, сделав такую же замену в формулах синуса двойного угла:

$$1 + \sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 \text{ и } 1 - \sin 2\alpha = (\sin \alpha - \cos \alpha)^2,$$

получим две формулы:

$$1 + \sin x = \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2, \quad 1 - \sin x = \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2,$$

из которых видно, что конструкции $1 \pm \sin x$ тоже являются полными квадратами.

Заметим, что последние две формулы можно переписать и по-другому. Если воспользоваться результатом примера 4 из параграфа 1.4, в котором было установлено, что $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)$, то первую формулу можно записать в виде:

$$1 + \sin x = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right).$$

Убедитесь самостоятельно, что в аналогичном виде может быть записана и вторая формула:

$$1 - \sin x = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

Наконец, синус и косинус двойного угла можно выразить через тангенс одинарного угла:

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Для доказательства первой из этих формул запишем равенство $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

Умножим и разделим правую часть на $\cos \alpha$ (в предположении, что $\cos \alpha \neq 0$):

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha$$

Поскольку $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, то $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$, что после подстановки в преобразуемое равенство даст:

$$\sin 2\alpha = 2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Для доказательства второй формулы запишем равенство $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ и в предположении, что $\cos \alpha \neq 0$, вынесем за скобки $\cos^2 \alpha$:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) = \cos^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

Подставляя, как и при доказательстве предыдущей формулы, $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$,

получим окончательно: $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

Эти формулы открывают большие возможности тождественных преобразований тригонометрических выражений. Но нужно обязательно помнить о существенном недостатке этих формул: области допустимых значений левых и правых частей у них не совпадают. Левая часть рассматриваемых формул определена при всех α , а правая – лишь при $\cos \alpha \neq 0$, т.е. при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, этими формулами нужно пользоваться с осторожностью, внимательно отслеживая возможность их применения в каждом конкретном случае.

Если вспомнить ещё формулу тангенса двойного угла, то можно сделать следующий важный вывод: любую тригонометрическую функцию двойного угла можно выразить через тангенс одинарного угла:

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Заметим, что в формуле тангенса двойного угла он выражается через тангенс одинарного. Основываясь на последней из выписанных четырёх формул, выведем формулу для котангенса двойного угла, в которой он выражается через котангенс одинарного угла.

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}}{2 \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}\right) \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha}{2 \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Пример 3. Упростите выражение $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$.

Решение.

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}.$$

Пример 4. Упростите выражение $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha$.

Решение.

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{2 \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

Мы внезапно вывели необычную формулу котангенса двойного угла:

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha).$$

Н

- 1 а) Какой угол называется двойным для данного угла?
б) Всякий ли угол является двойным для некоторого угла?

- 2 Запишите угол в виде 2α , подобрав нужный угол α .
а) 120° ; б) 84° ; в) 338° ; г) 42° .

- 3 Запишите угол в виде 2α , подобрав нужный угол α .
а) $\frac{3\pi}{2}$; б) $\frac{5\pi}{6}$; в) $\frac{26\pi}{15}$; г) $\frac{23\pi}{90}$.

- 4 Для какого угла данный угол является двойным?
а) 140° ; б) 50° ; в) 202° ; г) 138° .

- 5 Для какого угла данный угол является двойным?
а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{3\pi}{10}$; в) $\frac{25\pi}{18}$; г) $\frac{\pi}{30}$.

6 а) Выпишите все известные вам формулы синуса двойного угла.

б) Какие из выписанных формул вы умеете доказывать? Докажите.

7 а) Выпишите все известные вам формулы косинуса двойного угла.

б) Какие из выписанных формул вы умеете доказывать? Докажите.

8 а) Выпишите формулу тангенса двойного угла.

б) Докажите эту формулу.

9 Вычислите без таблиц и калькулятора.

а) $\frac{6 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}{\sin 20^\circ}$;

в) $\frac{\sin 88^\circ}{\sin 22^\circ \cos 22^\circ \cos 44^\circ}$;

б) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$;

г) $\frac{\sin 20^\circ}{\cos 10^\circ} - 2 \sin 10^\circ$.

10 Вычислите без таблиц и калькулятора.

а) $\sin^2 \frac{\pi}{8} - \cos^2 \frac{\pi}{8}$;

в) $\left(\left(\cos \frac{\pi}{16} + \sin \frac{\pi}{16} \right)^2 - 1 \right) \cos \frac{\pi}{8}$;

б) $\sin \frac{\pi}{12} \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{24} - 1 \right)$;

г) $\left(\cos \frac{\pi}{8} + \sin \frac{\pi}{8} \right) \left(1 + \cos \frac{\pi}{8} \right) - \cos \frac{\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8}$.

11 Найдите $\cos 2\alpha$, если известно, что:

а) $\cos \alpha = 0,4$;

в) $\sin \alpha = -0,7$;

д) $\cos \alpha = -m$;

б) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$;

г) $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$

е) $\sin \alpha = \frac{z-1}{\sqrt{2}}$.

12 Найдите $\sin 2\alpha$, если известно, что:

а) $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

в) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

б) $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

г) $\sin \alpha = -\frac{1}{4}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

13 Найдите $\sin 2\alpha$, если известно, что:

а) $\sin \alpha + \cos \alpha = 1,2$;

в) $\cos \alpha \sin \alpha = -0,4$;

б) $\sin \alpha - \cos \alpha = 0,1$;

г) $\cos \alpha - \sin \alpha = 0,3$.

14 Упростите.

а) $2 \cos^2 \alpha - \cos 2\alpha$;

в) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$;

б) $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} (2 \cos \alpha - 1)$;

г) $4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(\cos \alpha - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) - \cos 2\alpha$.

15 Упростите выражение.

а) $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$;

б) $\frac{\sin^2 \alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$;

в) $\frac{\sin \alpha - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha}$;

г) $\frac{1}{4 \cos 2\alpha} \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} 4\alpha}{\operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{ctg} 4\alpha} - \cos 4\alpha \right)$.

16 Докажите тождество.

а) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha$;

б) $\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1 - \cos 4\alpha}{8}$;

в) $\cos^8 \alpha - \sin^8 \alpha = \frac{1}{8} (7 \cos 2\alpha + \cos 6\alpha)$;

г) $\cos \alpha - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{4 \cos \alpha + \cos 2\alpha - 1}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$.

II

17 Найдите $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ и $\operatorname{ctg} 2\alpha$, если известно, что:

а) $\operatorname{tg} \alpha = -2$;

в) $\operatorname{ctg} \alpha = 0,4$;

б) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$;

г) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{7}$.

18 Упростите выражение.

а) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$;

б) $\frac{\cos 4\alpha \left((\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1 \right)}{(\sqrt{2} \cos 2\alpha - 1)(\sqrt{2} \cos 2\alpha + 1)}$;

в) $\frac{\sin 5\alpha - \cos 2\alpha}{2 \sin 3\alpha - 2 \cos 2\alpha - 2 \sin \alpha + 1}$;

г) $\frac{2 \cos \alpha + 2 \cos 3\alpha - 3 \cos 4\alpha - 1}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha}$.

19 Докажите тождество.

а) $\frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$;

б) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 4\alpha}{2 \cos 2\alpha + 3 \cos 4\alpha + 2} = \frac{1}{\sin 4\alpha}$;

в) $\frac{\cos^4 \alpha - \cos^4 2\alpha}{4 \cos 2\alpha - 3 \cos 4\alpha - \cos 8\alpha} = \frac{1}{8}$;

г) $\frac{5 \sin \frac{3\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{6 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + 4 \operatorname{tg} \alpha}$.

20) Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos 2\alpha = \frac{2}{3}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

21) Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{4}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

22) Найдите $\sin \alpha$, если $\operatorname{ctg} 2\alpha = -8$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

23) Найдите $\sin \alpha$, если $\cos 2\alpha = -\frac{1}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

24) Найдите $\cos \alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha = \sqrt{5}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

25) Найдите $\cos \alpha$, если $\sin 2\alpha = \frac{5}{6}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

26) Найдите $\operatorname{ctg} \alpha$, если $\cos 2\alpha = -\frac{1}{4}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

М

27) Найдите $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$, если $\frac{2\sin \alpha + 3\cos \alpha}{3\sin \alpha + 2\cos \alpha} = 2$.

28) Упростите выражение.

а) $\frac{3 - 4\cos \alpha + \cos 2\alpha}{3 + 4\cos \alpha + \cos 2\alpha}$;

б) $\frac{\sin 2\alpha + 5\sin 4\alpha + 4}{\cos 3\alpha - 2\sin 3\alpha - 2\cos \alpha}$.

29) Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения

а) $\cos 2\alpha + 2\cos \alpha$;

в) $\sin 2\alpha + 2\sin \alpha$;

б) $\cos 2\alpha - \sin \alpha$;

г) $\sin \alpha + \cos 2\alpha$.

30) Докажите, что если $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 1$, то $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ и $\cos 2\alpha = -\cos 2\beta$.

31) Вычислите без таблиц и калькулятора: $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}$.

1.6. Формулы приведения

Наверное, вы обращали внимание, что все таблицы значений тригонометрических функций составлены только для углов из первой четверти. Это объясняется тем, что их значения для всех остальных углов можно *свести* или *привести* к значениям углов из первой четверти. Для этого используются формулы, которые так и называются – *формулы приведения*. Впрочем, сфера использования этих формул шире, они используются также во многих тождественных преобразованиях и при решении других задач.

Договоримся об одном удобном способе записи на тригонометрической окружности. Изображая на ней точку, соответствующую углу α , мы подписывали её P_α . При всех положительных сторонах такой записи её недостатком является то, что она весьма громоздкая, особенно, если величина угла α дробная. К тому же, поскольку буква P присутствует в записи любой точки, тем самым получается, что она не несёт почти никакой информации. Поэтому изображая точку P_α на тригонометрической окружности, для простоты пишут возле неё просто α . На рис. 1.28 а показано, как мы подписывали точки тригонометрической окружности раньше, а на рис. 1.28 б – как мы будем делать это в дальнейшем, начиная с этого параграфа.

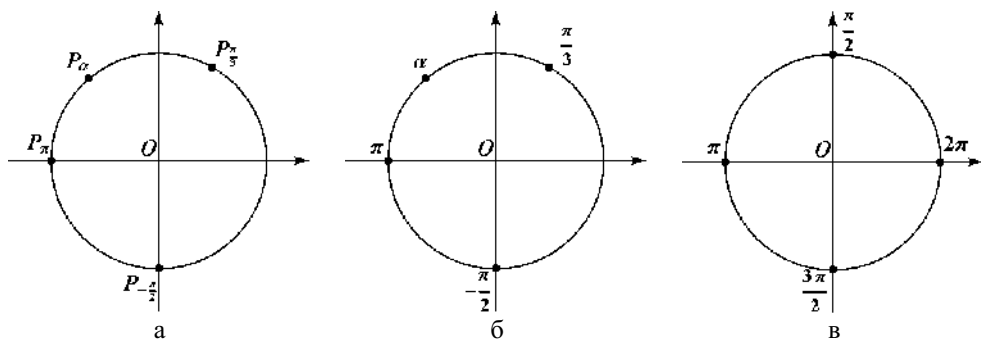


Рис. 1.28

Отметим на тригонометрической окружности точки, соответствующие её пересечениям с координатными осями (рис. 1.28 в).

Обычно формулами приведения называют формулы синуса, косинуса, тангенса и котангенса суммы или разности двух углов, первый из которых соответствует одной из отмеченных точек, т.е. для конструкций $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$; $\pi \pm \alpha$; $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$; $2\pi \pm \alpha$.

Таким образом, получается 32 формулы.

Ниже эти формулы выписаны в виде таблицы. Вы видите, что после применения любой из формул приведения получаем тригонометрическую функцию второго слагаемого, стоящего в скобке – со знаком «+» или «-». Ни в коем случае не надо стремиться запомнить эту таблицу! О том, как работать с формулами приведения будет сказано чуть ниже.

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$	$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg} \alpha$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$	$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{tg} \alpha$
$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$	$\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$
$\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha$	$\operatorname{tg}(2\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg}(2\pi + \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$

Доказательство формул приведения абсолютно прозрачно. Для синуса или косинуса нужно просто применить соответствующую формулу сложения, а для тангенса и котангенса – предварительно выразив их через синус и косинус.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\frac{3\pi}{2} \cos \alpha - \cos\frac{3\pi}{2} \sin \alpha = -1 \cdot \cos \alpha - 0 \cdot \sin \alpha = -\cos \alpha.$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{\sin\frac{\pi}{2} \cos \alpha + \cos\frac{\pi}{2} \sin \alpha}{\cos\frac{\pi}{2} \cos \alpha - \sin\frac{\pi}{2} \sin \alpha} = \frac{1 \cdot \cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha}{0 \cdot \cos \alpha - 1 \cdot \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{-\sin \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha$$

Создаётся впечатление, что эти формулы не представляют никакой самостоятельной ценности, являясь простыми частными случаями более общих формул сложения углов. Но это не совсем так. Всё же каждый раз получать нужную нам формулу приведения из формул сложения углов довольно долго. Было придумано очень

простое мнемоническое* правило, позволяющее выписать любую из формул приведения почти мгновенно.

Сначала полезно нарисовать (или представить мысленно) тригонометрическую окружность с разметкой, как на рис. 1.28 в.

Первые слагаемые, входящие в формулы приведения $\left(\frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, удобно трактовать как концы горизонтального $(\pi; 2\pi)$ или вертикального $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ диаметра тригонометрической окружности.

Далее работают два простых правила:

1) Поставь ручку (карандаш, палец, и т.д.) в нужный конец диаметра и чуть-чуть сдвинься в нужном направлении (против часовой стрелки, если в формуле приведения стоит знак «+», и по часовой стрелке, если «-»). Посмотри, в какой четверти ты оказался, и запиши знак твоей функции в этой четверти (знак «+» обычно не пишут).

2) Если ты имел дело с горизонтальным диаметром, то название функции не меняется, а если с вертикальным, то меняется: синус на косинус и наоборот, тангенс на котангенс и наоборот.

Рассмотрим несколько примеров использования этих правил. При этом вы можете смотреть на рис. 1.28 в или на выполненный вами аналогичный рисунок.

Пример 1. Найдите $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

Решение. 1) Став в точку $\frac{\pi}{2}$ тригонометрической окружности и чуть-чуть сдвинувшись в положительном направлении, мы оказываемся во II четверти. Косинус там отрицательный. Записываем знак «-».

2) Поскольку $\frac{\pi}{2}$ – конец вертикального диаметра, косинус заменяем на синус. В результате получаем: $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$.

Пример 2. Найдите $\operatorname{tg}(2\pi - \alpha)$.

Решение. 1) Став в точку 2π тригонометрической окружности и чуть-чуть сдвинувшись в отрицательном направлении, мы оказываемся в IV четверти. Тангенс там отрицательный. Записываем знак «-».

2) Поскольку 2π – конец горизонтального диаметра, название функции не меняется – оставляем тангенс. В результате получаем: $\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$.

* Мнемоническими называют правила, основанные не на смысле запоминаемого материала, а на случайных удачных наблюдениях, делающих запоминание лёгким – созвучии, совпадении, и.т.д.

Пример 3. Найдите $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

Решение. 1) Став в точку $\frac{3\pi}{2}$ тригонометрической окружности и чуть-чуть сдвинувшись в положительном направлении, мы оказываемся в IV четверти. Косинус там положительный. Знак «+» не пишем.

2) Поскольку $\frac{3\pi}{2}$ – конец вертикального диаметра, косинус заменяем на синус.

В результате получаем: $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$.

Рассмотрим теперь несколько примеров приведения тригонометрической функции произвольного угла к тригонометрической функции угла из первой четверти.

Пример 4. Преобразуйте по формуле приведения: $\sin 307^\circ$.

Решение. Здесь нам понадобится тригонометрическая окружность, размеченная в градусах (рис. 1.29).

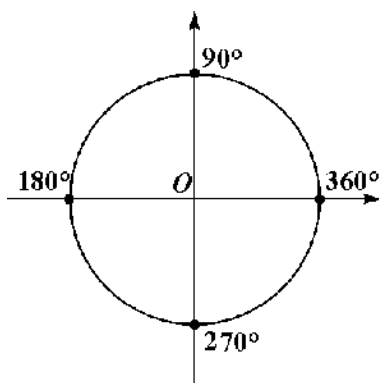


Рис. 1.29

До точки, соответствующей углу 307° (кратко принято говорить «до точки 307° »), можно добраться из точки 270° , сделав поворот на 37° , или от точки 360° , сделав поворот на -53° (на 53° по часовой стрелке). Таким образом, можно воспользоваться двумя формулами приведения. При решении большинства задач достаточно применить одну из формул, но сейчас, когда мы только осваиваем формулы приведения, решим задачу двумя способами.

Первый способ будет основываться на представлении $\sin 307^\circ = \sin(270^\circ + 37^\circ)$.

1) Став в точку 270° тригонометрической окружности и чуть-чуть сдвинувшись в положительном направлении, мы оказываемся в IV четверти. Синус там отрицательный. Записываем знак «-».

2) Поскольку 270° – конец вертикального диаметра, заменяем синус на косинус. В результате получаем: $\sin 307^\circ = \sin(270^\circ + 37^\circ) = -\cos 37^\circ$.

Второй способ будет основываться на представлении $\sin 307^\circ = \sin(360^\circ - 53^\circ)$.

1) Став в точку 360° тригонометрической окружности и чуть-чуть сдвинувшись в отрицательном направлении, мы оказываемся в IV четверти. Синус там отрицательный. Записываем знак «-».

2) Поскольку 360° – конец горизонтального диаметра, название функции не меняется – оставляем синус. В результате получаем:

$$\sin 307^\circ = \sin(360^\circ - 53^\circ) = -\sin 53^\circ.$$

Пример 5. Вычислите: $\cos 240^\circ$.

Решение. До точки, соответствующей углу 240° (кратко принято говорить «до точки 240° »), можно добраться из точки 180° , сделав поворот на 60° , или от точки 270° , сделав поворот на -30° (на 30° по часовой стрелке).

Так же, как и в предыдущем примере, можно воспользоваться двумя формулами приведения. В учебных целях мы тоже решим эту задачу двумя способами.

Первый способ будет основываться на представлении $\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ)$.

1) Став в точку 180° тригонометрической окружности и чуть-чуть сдвинувшись в положительном направлении, мы оказываемся в III четверти. Косинус там отрицательный. Записываем знак «-».

2) Поскольку 180° – конец горизонтального диаметра, название функции не меняется – оставляем косинус. В результате получаем:

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$$

Второй способ будет основываться на представлении $\cos 240^\circ = \cos(270^\circ - 30^\circ)$.

1) Став в точку 270° тригонометрической окружности и чуть-чуть сдвинувшись в отрицательном направлении, мы оказываемся в III четверти. Косинус там отрицательный. Записываем знак «-».

2) Поскольку 270° – конец вертикального диаметра, заменяем косинус на синус.

В результате получаем: $\cos 240^\circ = \cos(270^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$.

Пример 6. Вычислите: $\operatorname{tg} 855^\circ$.

Решение. Здесь нам сначала понадобится выведенная в параграфе 1.2 формула: Для любого угла α , такого, что $\cos \alpha \neq 0$, и любого целого числа n справедливо равенство: $\operatorname{tg}(\alpha + 180^\circ n) = \operatorname{tg} \alpha$. Чтобы определить n , разделим 855 на 180 с остатком, получим: $855 : 180 = 4$ (ост. 135). Отсюда заключаем, что $855 = 180 \cdot 4 + 135$, а значит $\operatorname{tg} 855^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ \cdot 4 + 135^\circ) = \operatorname{tg} 135^\circ$.

Теперь пришёл черёд формулы приведения. Запишем $\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ + 45^\circ)$ и приступим:

1) Став в точку 90° тригонометрической окружности и чуть-чуть сдвинувшись в положительном направлении, мы оказываемся во II четверти. Тангенс там отрицательный. Записываем знак «-».

2) Поскольку 90° – конец вертикального диаметра, заменяем тангенс на котангенс. В результате получаем: $\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ + 45^\circ) = -\operatorname{ctg} 45^\circ = -1$.

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

- а) Какие формулы называются формулами приведения?
- б) Чем объясняется такое название?

2 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

- а) Как доказываются формулы приведения?
- б) Как можно просто запомнить формулы приведения?

3 Используя формулы приведения, упростите.

- а) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; в) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$; д) $\sin(\pi + \alpha)$;
- б) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; г) $\operatorname{ctg}(2\pi + \alpha)$; е) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

4 Используя формулы приведения, упростите.

- а) $\sin(90^\circ + \alpha)$; в) $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)$; д) $\cos(180^\circ + \alpha)$;
- б) $\cos(270^\circ - \alpha)$; г) $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha)$; е) $\sin(360^\circ + \alpha)$.

5 Приведите к углу α , где $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

- а) $\sin 133^\circ$; в) $\operatorname{ctg} 160^\circ$; д) $\sin 358^\circ$;
- б) $\cos 232^\circ$; г) $\operatorname{tg} 269^\circ$; е) $\cos 196^\circ$.

6 Приведите к углу α , где $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

- а) $\sin \frac{11\pi}{9}$; в) $\operatorname{ctg} \frac{8\pi}{15}$; д) $\sin \frac{67\pi}{36}$;
- б) $\cos \frac{39\pi}{20}$; г) $\operatorname{tg} \frac{133\pi}{90}$; е) $\cos \frac{77\pi}{60}$.

7 Приведите к углу α , где $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

- а) $\sin 1024^\circ$; в) $\operatorname{tg} 939^\circ$; д) $\sin 1437^\circ$;
- б) $\cos 408^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 1179^\circ$; е) $\cos 602^\circ$.

8 Приведите к углу α , где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

а) $\sin \frac{33\pi}{7}$;

в) $\operatorname{tg} \frac{91\pi}{45}$;

д) $\sin \frac{20\pi}{9}$;

б) $\cos \frac{503\pi}{90}$;

г) $\operatorname{ctg} \frac{176\pi}{15}$;

е) $\cos \frac{77\pi}{30}$.

9 Вычислите.

а) $\sin 210^\circ$;

в) $\operatorname{tg} 120^\circ$;

д) $\sin 150^\circ$;

б) $\cos 300^\circ$;

г) $\operatorname{ctg} 225^\circ$;

е) $\cos 315^\circ$.

10 Вычислите.

а) $\sin \frac{5\pi}{6}$;

в) $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$;

д) $\sin \frac{7\pi}{6}$;

б) $\cos \frac{5\pi}{3}$;

г) $\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{6}$;

е) $\cos \frac{2\pi}{3}$.

11 Вычислите.

а) $\sin 1035^\circ$;

в) $\operatorname{tg} 1020^\circ$;

д) $\sin 960^\circ$;

б) $\cos 855^\circ$;

г) $\operatorname{ctg} 660^\circ$;

е) $\cos 495^\circ$.

12 Вычислите.

а) $\sin \frac{31\pi}{4}$;

в) $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{3}$;

д) $\sin \frac{23\pi}{6}$;

б) $\cos \frac{17\pi}{4}$;

г) $\operatorname{ctg} \frac{17\pi}{6}$;

е) $\cos \frac{17\pi}{3}$.

13 Докажите тождество.

а) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\pi - \alpha)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = 0$;

б) $\cos(\pi - \alpha) = \cos(\alpha + \pi)$;

г) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin(\alpha - \pi)$.

14 Докажите тождество.

а) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$;

в) $\sin\left(\frac{11\pi}{6} - x\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$;

г) $\sin\left(\frac{5\pi}{4} + x\right) = \cos\left(\frac{13\pi}{4} - x\right)$.

15 Используя формулы приведения, вычислите.

- а) $4 \cos 150^\circ - \sin 240^\circ - 3 \operatorname{tg} 210^\circ$; в) $\sin 300^\circ - 3 \cos 135^\circ + 2 \cos 210^\circ$;
 б) $2 \cos 135^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{ctg} 240^\circ$; г) $\operatorname{tg} 150^\circ - \operatorname{ctg} 315^\circ + 5 \sin 135^\circ$.

16 Используя формулы приведения, вычислите.

- а) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} - 2 \operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} + 3 \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6}$; в) $20 \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{2} - \sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{4\pi}{3}$;
 б) $2 \cos \frac{4\pi}{3} + \sin \frac{5\pi}{4} - \cos \frac{4\pi}{3}$; г) $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4} + 2 \operatorname{ctg} \frac{4\pi}{3} - 2 \cos \frac{5\pi}{6}$.

17 Упростите выражение.

- а) $\frac{1 - \operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha) + \operatorname{tg} \alpha}$; в) $\frac{\cos(360^\circ - \alpha) \sin(270^\circ - \alpha)}{\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(270^\circ + \alpha)}$;
 б) $\frac{\cos(90^\circ + \alpha) + \sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(270^\circ - \alpha) + \cos(180^\circ + \alpha)}$; г) $\frac{\cos(180^\circ + \alpha) + \cos(270^\circ + \alpha) + \cos(90^\circ + \alpha)}{\sin(180^\circ + \alpha) + \sin(270^\circ + \alpha) + \sin(90^\circ + \alpha)}$.

18 Упростите выражение.

- а) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}\right) - \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2}\right)}$; в) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \sin(\beta - \pi) + \cos(\pi - 2\beta)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \cos(\pi - \beta) + \sin(\pi - 2\beta)}$;
 б) $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2\alpha\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\alpha\right)} + 1$; г) $\frac{\sin\left(a - \frac{3\pi}{2}\right) + \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos(a + 2\pi) - \cos(a - \pi)}$.

П

19 Докажите тождество.

- а) $\frac{\sin(\pi - 2\alpha) - 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin^2(\pi + \alpha) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = 2 \operatorname{ctg} \alpha$; б) $\frac{\sin^4\left(a - \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2(2\alpha + \pi)}{1 - 3 \cos(2\alpha + \pi)} = \frac{\sin^2 \alpha}{2}$;
 в) $\frac{\sin\left(2\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \sin^2(\alpha + \pi)}{(\cos(\alpha + 2\pi) - \sin(\alpha - \pi))^2 + \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \cos^2 \alpha$;

$$\text{г) } \frac{3 \sin^4 \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) - 3 \sin^4 (\pi - \alpha) + \cos 4\alpha \cos^4 (\alpha + \pi) - \sin^4 (\pi + \alpha) \cos 4\alpha}{\sin^4 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + \cos^4 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} = 4 \cos 2\alpha .$$

20 Докажите, что если A, B, C – внутренние углы треугольника, то справедливы соотношения.

$$\text{а) } \sin(A+B) = \sin C ; \quad \text{в) } \operatorname{tg} A \operatorname{tg}(A+B) + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} B \operatorname{tg}(A+B) + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 0 ;$$

$$\text{б) } \frac{\sin(B+C) \sin(A+C)}{\sin A \sin B} = 1 ; \quad \text{г) } \frac{\cos A \cos B + \cos A \cos C}{\cos B - \cos(A+B)} = \cos A .$$

21 Упростите выражение.

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{\operatorname{tg}^3 \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha \right)}{\operatorname{ctg}^3 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right)} ; \quad \text{в) } \frac{\cos^6 \left(\alpha - \frac{3\pi}{2} \right) - \sin^6 \left(\alpha + \frac{5\pi}{2} \right)}{(\sin 2\alpha - 2)(2 + \sin 2\alpha) \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)} ; \\ \text{б) } & \frac{4 \sin^2 \left(4\alpha - \frac{\pi}{2} \right) - \sin^4 \left(2\alpha + \frac{3\pi}{2} \right)}{1 - 5 \cos(4\alpha + 5\pi)} ; \quad \text{г) } \frac{\sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + \cos^2 \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{5\pi}{2} \right) - 2}{2 \cos \left(\frac{\alpha}{2} + 7\pi \right) + 3} . \end{aligned}$$

М

22 Докажите, что тригонометрическую функцию любого угла можно свести к тригонометрической функции угла α , такого что $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$.

1.7. Преобразование алгебраических сумм синусов и косинусов в произведения. Преобразование произведений синусов и косинусов в алгебраические суммы.

Доказанные в параграфе 1.5 формулы сложения для косинуса и синуса позволяют получить несколько полезных следствий, играющих важную роль при преобразовании тригонометрических выражений.

Мы сначала выведем эти формулы, а затем обсудим сферу их применения.

Запишем формулы косинуса разности и косинуса суммы.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

Если сложить эти две формулы, то получим:

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta.$$

С полученным равенством мы сделаем две вещи.

Во-первых, разделив обе его части на 2 и переписав «справа налево», получим формулу:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$$

Эта формула позволяет преобразовывать произведение косинусов в сумму (так говорят, допуская некоторую вольность речи – ведь на самом деле эта сумма умножается ещё на коэффициент $\frac{1}{2}$, но всё же основное в правой части – это сумма).

Во-вторых, если внимательно посмотреть на полученное равенство $\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$, то понятно, что его можно трактовать как преобразование суммы двух косинусов, стоящих в левой части, в произведение, стоящее в правой части. Вот только аргументы косинусов в левой части этого равенства громоздкие, и для практического использования таким образом записанная формула неудобная. Сделаем в ней замену переменных, обозначив $\alpha + \beta = x$, $\alpha - \beta = y$. Если теперь выразить x и y через α и β , то получим

$\alpha = \frac{x+y}{2}$, $\beta = \frac{x-y}{2}$, и равенство $\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$ можно переписать в виде:

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

Получена формула для преобразования суммы двух косинусов в произведение.

Её удобно читать следующим образом «Сумма косинусов двух углов равна удвоенному произведению косинуса полусуммы этих углов на косинус их полуразности», или ещё короче «Сумма косинусов равна два косинус полусуммы умножить на косинус полуразности».

Если, опять записав формулы косинуса разности и косинуса суммы.

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta,$$

мы вычтем из первой формулы вторую, то получим:

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Разделив обе части этого равенства на 2 и переписав его «справа налево», получим формулу:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

позволяющую преобразовывать произведение синусов в разность.

Если же формуле $\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$, аналогично тому, как мы делали выше, сделать замену переменных, обозначив $\alpha + \beta = x$, $\alpha - \beta = y$, откуда,

как и прежде, $\alpha = \frac{x+y}{2}$, $\beta = \frac{x-y}{2}$, то получим:

$$\cos y - \cos x = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Это формула для преобразования разности двух косинусов в произведение, которую для простоты запоминания принято записывать в виде:

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Краткое прочтение этой формулы таково: «Разность косинусов равна минус два синус полусуммы умножить на синус полуразности».

Точно таким же способом можно вывести формулы для преобразования суммы и разности двух синусов в произведение:

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\ \sin x - \sin y &= 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}, \end{aligned}$$

а также формулу для преобразования произведения синуса и косинуса в сумму:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

Четыре формулы для преобразования суммы и разности (т.е. алгебраической суммы) двух синусов или двух косинусов в произведения по сути являются тригонометрическими формулами разложения на множители и применяются в тех ситуациях, где произведение «лучше», чем алгебраическая сумма. Это преобразование дробей, где числитель и знаменатель полезно раскладывать на множители, а также решение тригонометрических уравнений, многие из которых

решаются методом разложения на множители левой части при нулевой правой части.

Заметим также, что эти четыре формулы иногда называют формулами сложения функций. Понятно, в чём их отличие от рассмотренных в параграфе 1.5 формул сложения углов.

Наконец, обсудим ещё одну особенность этих формул. Видно, что они содержат алгебраические суммы только одноимённых функций – двух синусов или двух косинусов. Если понадобится преобразовать в произведение алгебраическую сумму разноимённых функций, т.е. синуса и косинуса, то нужно сначала с помощью подходящей формулы приведения преобразовать синус в косинус или наоборот.

Пример 1. Преобразуйте в произведение: $\sin x + \cos y$.

Решение. Преобразуем сначала синус в косинус по формуле приведения:

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Затем применим формулу суммы косинусов:

$$\sin x + \cos y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos y = 2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x+y}{2}\right).$$

Произведение получилось весьма громоздким, но как образно говорится, иногда лучше иметь «плохое» произведение, чем «хорошую» сумму.

Пример 2. Упростите выражение: $\frac{\sin 5\alpha + \sin 3\alpha}{\cos 5\alpha + \cos 3\alpha}$.

Решение. Преобразуем суммы в числителе и знаменателе в произведения в надежде, что дробь сократится. При этом полусумму и полуразность удобно вычислять предварительно устно. У нас полусумма 5α и 3α равна 4α , а полуразность равна α , поэтому получим:

$$\frac{\sin 5\alpha + \sin 3\alpha}{\cos 5\alpha + \cos 3\alpha} = \frac{2 \sin 4\alpha \cos \alpha}{2 \cos 4\alpha \cos \alpha} = \frac{\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha.$$

Пример 3. Упростите выражение: $\frac{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}{\sin x + \sin 2x + \sin 3x}$.

Решение. Здесь возникает дополнительная проблема – сумму каких двух из трёх имеющихся в числителе косинусов лучше всего преобразовывать в произведение (а также аналогичная проблема в знаменателе). В незнакомой ситуации нет иного выхода, чем пробовать различные варианты и смотреть, что из этого получится.

$$\begin{aligned} \frac{\cos x + \cos 2x + \cos 3x}{\sin x + \sin 2x + \sin 3x} &= \frac{(\cos x + \cos 3x) + \cos 2x}{(\sin x + \sin 3x) + \sin 2x} = \frac{2 \cos 2x \cos(-x) + \cos 2x}{2 \sin 2x \cos(-x) + \sin 2x} = \\ &= \frac{\cos 2x(2 \cos x + 1)}{\sin 2x(2 \cos x + 1)} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \operatorname{ctg} 2x. \end{aligned}$$

Пример 5. Вычислите, не пользуясь таблицами и калькулятором: $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \sin 80^\circ$.

Решение. Начнём с того, что преобразуем сумму синусов в произведение:

$$\begin{aligned}\sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \sin 80^\circ &= 2 \sin 30^\circ \cos 10^\circ - \sin 80^\circ = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 10^\circ - \sin 80^\circ = \cos 10^\circ - \sin 80^\circ = 0,\end{aligned}$$

поскольку по формуле дополнительного угла (или по формуле приведения) $\cos 10^\circ = \sin 80^\circ$.

Пример 5. Упростите выражение: $\sin^2 \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

Решение. Начнём с преобразования произведения косинусов в сумму:

$$\sin^2 \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \sin^2 \alpha + \frac{1}{2}\left(\cos \frac{2\pi}{3} + \cos 2\alpha\right) =$$

(теперь применим к обоим косинусам в скобках формулу двойного угла)

$$= \sin^2 \alpha + \frac{1}{2}\left(1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{3} + 1 - 2\sin^2 \alpha\right) = \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} - \sin^2 \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} - \sin^2 \alpha =$$

$$= 1 - \sin^2 \frac{\pi}{3} = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

Н

1 Как вы думаете, почему формул для преобразования алгебраических сумм в произведения четыре, а формул для обратного преобразования – произведений в алгебраические суммы – только три?

2 Преобразуйте в произведение.

а) $\sin 7\alpha + \sin 3\alpha$;	в) $\cos 4\alpha - \cos 3\alpha$;
б) $\sin 6\alpha - \sin 5\alpha$;	г) $\cos 4\alpha + \cos 6\alpha$.

3 Преобразуйте алгебраическую сумму в произведение и упростите.

а) $\sin 50^\circ + \sin 10^\circ$;	в) $\cos 39^\circ - \cos 21^\circ$;	д) $\sin 50^\circ - \sin 10^\circ$;
б) $\sin 80^\circ - \sin 20^\circ$;	г) $\cos 31^\circ - \cos 59^\circ$;	е) $\cos 2^\circ + \cos 58^\circ$.

4 Преобразуйте алгебраическую сумму в произведение и упростите.

а) $\sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{21}$;	в) $\cos \frac{133\pi}{90} + \cos \frac{167\pi}{90}$;	д) $\sin \frac{7\pi}{36} + \sin \frac{29\pi}{36}$;
б) $\sin \frac{7\pi}{20} + \sin \frac{59\pi}{60}$;	г) $\cos \frac{17\pi}{45} - \cos \frac{103\pi}{45}$;	е) $\sin \frac{7\pi}{45} - \sin \frac{83\pi}{45}$.

5 Упростите выражение.

а) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right);$

в) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right);$

б) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right);$

г) $\sin\left(\frac{5\pi}{7} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{14} - \alpha\right).$

6 Вычислите без таблиц и калькулятора.

а) $\sin 105^\circ + \sin 15^\circ;$

в) $\cos 615^\circ + \cos 15^\circ;$

б) $\sin 465^\circ - \sin 165^\circ;$

г) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ.$

7 Докажите тождества.

а) $\cos 2\alpha + 2\cos 4\alpha + \cos 6\alpha = 4\cos^2 \alpha \cos 4\alpha;$

б) $1 + 2\cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 4\cos^2 \alpha \cos 2\alpha;$

в) $2\cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 8\alpha = 4\cos 2\alpha \cos^2 3\alpha;$

г) $2\sin \alpha - \sin 11\alpha + \sin 13\alpha = 4\cos^2 6\alpha \sin \alpha.$

8 Вычислите без таблиц и калькулятора.

а) $\cos 80^\circ + \cos 40^\circ - \cos 20^\circ;$

в) $\sin 228^\circ - \sin 72^\circ + \sqrt{3}\sin 78^\circ;$

б) $\cos 164^\circ - \cos 136^\circ + \sin 14^\circ;$

г) $\sin 48^\circ + \sin 42^\circ + \sqrt{2}\cos 183^\circ.$

9 Упростите выражение.

а) $\frac{\cos \alpha + \cos 3\alpha}{\sin \alpha - \sin 3\alpha};$

в) $\frac{\sin 2\alpha - 3\sin 3\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - 3\cos 3\alpha + \cos 4\alpha};$

б) $\frac{\cos 2\alpha - \sin 8\alpha}{\sin 4\alpha - \cos 6\alpha};$

г) $\frac{\cos 4\alpha - \sin \alpha + \cos 3\alpha}{\cos 4\alpha - \cos \alpha + \sin 3\alpha} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$

10 Докажите тождество.

а) $\frac{\sin 2\alpha - \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 4\alpha} = 2\sin \alpha;$

в) $\frac{\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = 1 + 2\cos \alpha;$

б) $\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha - \operatorname{tg} 4\alpha}{\sin 7\alpha - \sin \alpha - 2\cos \alpha - 2\cos 3\alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos 4\alpha};$

г) $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha - 2.$

11 Преобразуйте в алгебраическую сумму.

а) $\sin 7\alpha \sin 3\alpha;$

в) $\sin 2\alpha \cos 5\alpha;$

б) $\cos 11\alpha \sin 9\alpha;$

г) $\cos 4\alpha \cos 10\alpha.$

12 Вычислите без таблиц и калькулятора.

- а) $\sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24}$; в) $\cos \frac{7\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$;
б) $\sin \frac{5\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8}$; г) $\cos \frac{23\pi}{24} \cos \frac{17\pi}{24}$.

П

13 Докажите тождество.

- а) $\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha = 4 \cos 4\alpha \cos \frac{5\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$;
б) $\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha = 4 \sin \alpha (\cos \alpha + \cos 3\alpha)^2$;
в) $\sin \alpha + \cos 3\alpha + \sin 5\alpha + \cos 7\alpha = 8 \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(4\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \sin^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$;
г) $\cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 6\alpha + \cos 11\alpha = (1 - 4 \sin^2 2\alpha) (\cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 7\alpha)$.

14 Вычислите без таблиц и калькулятора.

- а) $\sin^2 40^\circ - \sin 10^\circ \cos 20^\circ$;
б) $\sqrt{3} \left(\sin^4 35^\circ + \cos^4 35^\circ + \cos 70^\circ - \frac{3}{2} \sin^2 70^\circ \right) + 2\sqrt{2} \cos 35^\circ - \sin 40^\circ - \sin 70^\circ$;
в) $\sin 20^\circ - \cos 10^\circ + \cos 10^\circ \cos^2 20^\circ - \sin 10^\circ \sin 40^\circ - \sin^2 20^\circ \cos 10^\circ$;
г) $\frac{3\sqrt{3}}{8} \operatorname{tg} 2^\circ + \frac{\cos 62^\circ}{\cos 2^\circ} + \sin 31^\circ \frac{\cos 1^\circ}{\cos 2^\circ} (1 - 3 \cos^2 31^\circ) - 3 \frac{\sin 1^\circ}{\cos 2^\circ} \sin^2 31^\circ \cos 31^\circ + \frac{\sin 1^\circ}{\cos 2^\circ} \cos 31^\circ$

15 Докажите тождество.

- а) $\sin 2\alpha \cos 5\alpha + \sin \alpha \cos 2\alpha = \sin 3\alpha \cos 4\alpha$;
б) $\cos 5\alpha \sin 4\alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha = \cos 3\alpha \sin 6\alpha$;
в) $\sin 7\alpha \cos 6\alpha - \cos 8\alpha \sin 5\alpha = \cos \alpha \sin 2\alpha$;
г) $2 \sin 7\alpha \cos 7\alpha - 2 \sin 5\alpha \cos 9\alpha = \sin 4\alpha$.

16 Докажите, что если A, B, C – внутренние углы треугольника, то справедливы соотношения.

- а) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$; в) $\frac{\sin C}{\cos A \cos B} = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B$;
б) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$; г) $\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$.

17 Упростите выражение.

а) $\frac{1 + 2 \cos 2\alpha}{\cos(30^\circ + \alpha)}$;

б) $\frac{\sqrt{3} - 2 \sin 2\alpha}{\sin(30^\circ - \alpha)}$.

18 Вычислите без таблиц и калькулятора.

а) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$;

в) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$;

б) $\cos 5^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 85^\circ$;

г) $\frac{\cos 13^\circ \cos 26^\circ \cos 52^\circ \cos 77^\circ}{\cos 14^\circ}$.

М

19 Упростите выражение.

а) $\sin^3 \alpha \cos 3\alpha + \cos^3 \alpha \sin 3\alpha$;

б) $4 \cos^3 2\alpha \cos 4\alpha - 4 \sin^3 2\alpha \sin 4\alpha - 3 \cos 6\alpha$.

20 Найдите наибольшее значение выражения $\cos A \cos B \cos C$, где A, B, C – внутренние углы треугольника.

1.8*. Формулы тройного и половинного угла

Основными формулами тройного угла являются следующие три формулы:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Каждая из них выводится одним и тем же рассуждением: основываясь на равенстве $3\alpha = 2\alpha + \alpha$, записываем формулу для синуса, косинуса или тангенса суммы $2\alpha + \alpha$ соответственно, а затем применяем формулы двойного угла для 2α .

$$\begin{aligned} 1) \sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos 2\alpha = \\ &= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) = 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) = \\ &= \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha) = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha = \\ &= (2 \cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - \sin \alpha \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha = (2 \cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha = \\ &= (2 \cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2(1 - \cos^2 \alpha) \cos \alpha = \cos \alpha (4 \cos^2 \alpha - 3) = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \operatorname{tg} 3\alpha &= \operatorname{tg}(2\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \\
 &= \frac{\left(\frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} + \operatorname{tg} \alpha \right) \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\left(1 - \frac{2\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{2\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha - 2\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}.
 \end{aligned}$$

Основываясь на формуле тангенса тройного угла можно получить формулу котангенса тройного угла следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ctg} 3\alpha &= \frac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha} = \frac{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}{3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha} = \frac{1 - 3 \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha}}{3 \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{ctg}^3 \alpha}} = \frac{\left(1 - \frac{3}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} \right) \cdot \operatorname{ctg}^3 \alpha}{\left(\frac{3}{\operatorname{ctg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{ctg}^3 \alpha} \right) \cdot \operatorname{ctg}^3 \alpha} = \\
 &= \frac{\left(1 - \frac{3}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} \right) \cdot \operatorname{ctg}^3 \alpha}{\left(\frac{3}{\operatorname{ctg} \alpha} - \frac{1}{\operatorname{ctg}^3 \alpha} \right) \cdot \operatorname{ctg}^3 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3\operatorname{ctg} \alpha}{3\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1} = \frac{3\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{ctg}^2 \alpha}.
 \end{aligned}$$

Обращает на себя внимание абсолютная аналогичность формул тангенса и котангенса тройного угла – в отличие от формул тангенса и котангенса двойного угла.

Половинным углом для угла α называется угол $\frac{\alpha}{2}$. Поскольку понятия двойного угла и половинного угла являются взаимными (если первый угол является для второго половинным, то второй для первого – двойным), то формулы половинного угла тесно связаны с формулами двойного угла.

Первые две формулы половинного угла мы получим, если запишем формулы понижения степени для угла β :

$$\sin^2 \beta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta), \quad \cos^2 \beta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\beta),$$

а затем сделаем в них замену $\beta = \frac{\alpha}{2}$ (и соответственно $2\beta = \alpha$):

$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) \qquad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)$

Мы считаем, что удобнее помнить эти формулы именно в таком виде – с квадратами, а не переписывать их в виде с квадратными корнями, вроде

$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$, тем более, что выбор знака перед корнем заранее неясен и может быть осуществлён только при наличии информации о пределах, в которых изменяется угол α .

Для равенства, задаваемые полученными формулами, одно на другое, получим формулы половинного угла, в которых фигурирует квадрат тангенса и квадрат котангенса:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \qquad \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

Наконец, выпишем «истинные» формулы половинного угла, в которых содержатся не квадраты тригонометрической функций половинного угла, а сами эти функции. Впрочем, сделать это удастся только для тангенса и котангенса.

Формулы тангенса половинного угла имеют вид:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \qquad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Первая из этих формул была доказана в примере 1 параграфа 1.5, причём она возникла внезапно в результате преобразования правой части.

Докажем вторую формулу несколько по-другому, начав с преобразования левой части. При этом всё равно применяемые преобразования будут искусственными:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

На последнем шаге мы воспользовались в знаменателе формулой половинного угла для квадрата косинуса.

Формулы котангенса половинного угла получаются переходом к обратным выражениям в левой и правой частях формул тангенса половинного угла и имеют вид:

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \qquad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Наконец, обсудим очень важный вопрос, сильно интересовавший средневековых математиков, которые были так сказать первопроходцами тригонометрии: можно ли выразить все тригонометрические функции данного угла через какую-нибудь одну тригонометрическую функцию? В параграфе 1.3 было установлено, что этого нельзя

сделать, если пытаться выражать через тригонометрическую функцию того же самого угла.

В то же время в параграфе 1.5 были доказаны формулы, позволяющие выразить любую тригонометрическую функцию двойного угла через тангенс одинарного угла. Запишем их в виде:

$$\sin 2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}, \quad \cos 2\beta = \frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta}, \quad \operatorname{tg} 2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}, \quad \operatorname{ctg} 2\beta = \frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{2\operatorname{tg}\beta},$$

а затем сделаем в них замену $\beta = \frac{\alpha}{2}$ (и соответственно $2\beta = \alpha$). Получим:

$$\sin \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \cos \alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Итак, установлено, что все тригонометрические функции данного угла могут быть выражены через тангенс половинного угла.

Нужно обязательно помнить о существенном недостатке этих формул: области допустимых значений левых и правых частей у них не совпадают. Например, левые части первых двух формул определены при всех α , а правая – лишь при $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$,

т.е. при $\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $\alpha \neq \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, этими формулами нужно пользоваться с осторожностью, внимательно отслеживая возможность их применения в каждом конкретном случае.

Записанные выше формулы иногда также называют *универсальной тригонометрической подстановкой*. Если выполнить в них замену (подстановку)

$t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, то они переписутся в виде:

$$\sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1-t^2}{2t}.$$

Таким образом, все тригонометрические функции являются рациональными выражениями от переменной t . По этой причине универсальная тригонометрическая подстановка называется ещё *рационализирующей*.

Эти формулы открывают большие возможности для сведения многих задач на тождественные преобразования тригонометрических выражений к задачам на тождественные преобразования рациональных выражений.

Н

- 1 а) Какой угол называется тройным для данного угла?
б) Всякий ли угол является тройным для некоторого угла?
- 2 Запишите угол в виде 3α , подобрав нужный угол α .
а) 135° ; б) 153° ; в) 93° ; г) 186° .
- 3 Запишите угол в виде 3α , подобрав нужный угол α .
а) $\frac{3\pi}{2}$; б) $\frac{14\pi}{15}$; в) $\frac{6\pi}{5}$; г) $\frac{13\pi}{12}$.
- 4 Для какого угла данный угол является тройным?
а) 120° ; б) 132° ; в) 144° ; г) 267° .
- 5 Для какого угла данный угол является тройным?
а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{15}$; в) $\frac{3\pi}{20}$; г) $\frac{7\pi}{12}$.
- 6 а) Какой угол называется половинным для данного угла?
б) Всякий ли угол является половинным для некоторого угла?
- 7 Запишите угол в виде $\frac{\alpha}{2}$, подобрав нужный угол α .
а) 75° ; б) 36° ; в) 81° ; г) 60° .
- 8 Запишите угол в виде $\frac{\alpha}{2}$, подобрав нужный угол α .
а) $\frac{3\pi}{8}$; б) $\frac{2\pi}{5}$; в) $\frac{3\pi}{20}$; г) $\frac{9\pi}{10}$.
- 9 Для какого угла данный угол является половинным?
а) 20° ; б) 63° ; в) 15° ; г) 129° .
- 10 Для какого угла данный угол является половинным?
а) $\frac{\pi}{12}$; б) $\frac{\pi}{30}$; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{20}$.
- 11 а) Выпишите все известные вам формулы тройного угла.
б) Какие из выписанных формул вы умеете доказывать? Докажите.
- 12 а) Выпишите все известные вам формулы половинного угла.
б) Какие из выписанных формул вы умеете доказывать? Докажите.

13 Пользуясь формулами половинного угла, вычислите без таблиц и калькулятора.

- а) $\operatorname{tg} 15^\circ$; в) $\cos 15^\circ$; д) $\sin 7^\circ 30'$;
б) $\sin 15^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 15^\circ$; е) $\cos 22^\circ 30'$.

14 Пользуясь формулами половинного угла, вычислите без таблиц и калькулятора.

- а) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$; в) $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{16}$; д) $\sin \frac{\pi}{24}$;
б) $\sin \frac{\pi}{8}$; г) $\cos \frac{\pi}{12}$; е) $\cos \frac{\pi}{48}$.

15 Найдите $\cos 3\alpha$, если известно, что:

- а) $\cos \alpha = 1$; в) $\cos \alpha = -0,2$; д) $\cos \alpha = x$;
б) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$; г) $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ е) $\cos \alpha = 0,5$.

16 Найдите $\sin 3\alpha$, если известно, что:

- а) $\sin \alpha = 0,4$; в) $\sin \alpha = -0,7$; д) $\sin \alpha = -2m$;
б) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$; г) $\sin \alpha = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3})$ е) $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$.

17 Найдите $\operatorname{tg} 3\alpha$ и $\operatorname{ctg} 3\alpha$, если известно, что:

- а) $\operatorname{tg} \alpha = -1$; в) $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{2}$; д) $\operatorname{tg} \alpha = y$;
б) $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\operatorname{ctg} \alpha = 2 - \sqrt{3}$ е) $\operatorname{ctg} \alpha = -2$.

II

18 Упростите.

- а) $4\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha$; в) $\sin 3\alpha - 3\sin \alpha$;
б) $4\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha$; г) $3\cos \alpha + \cos 3\alpha$.

19 Упростите выражение.

- а) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$; в) $\frac{2\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \alpha}{2\sin \frac{\alpha}{2} - \sin \alpha}$;
б) $\frac{\cos \alpha - 1}{1 + \cos \alpha}$; г) $\frac{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} \alpha}$.

20 Найдите $\operatorname{tg} 3\alpha$, если известно, что:

а) $\sin \alpha = 3 \cos \alpha$;

в) $5 \sin \alpha = \sqrt{5} \cos \alpha$;

б) $\sqrt{2} \sin \alpha - \cos \alpha = 0$;

г) $\cos \alpha + 10 \sin \alpha = 0$.

21 Найдите $\operatorname{tg} 3\alpha$, если известно, что:

а) $\frac{\sin \alpha - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha + 3 \cos \alpha} = 2$;

в) $\frac{80 \sin \alpha + 100 \cos \alpha}{50 \cos \alpha + 20 \sin \alpha} = 6$;

б) $\frac{9 \cos \alpha - 11 \sin \alpha}{10 \sin \alpha - 3 \cos \alpha} = -\frac{2}{7}$;

г) $\frac{\sqrt{2} \cos \alpha - \sqrt{3} \sin \alpha}{\sqrt{5} \cos \alpha - \sqrt{7} \sin \alpha} = \frac{\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 3\sqrt{7}}$.

22 Найдите значение выражения, если известно, что $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2$.

а) $\frac{\sin \alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha + 2}$;

в) $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - 3 \sin \alpha + \frac{13}{4}}$;

б) $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + 2}$;

г) $\frac{\sin \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \alpha - \frac{2}{15}}{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha}$.

23 Найдите значение выражения, если известно, что $\operatorname{tg} \alpha = -3$, $\operatorname{tg} \beta = 4$.

а) $\sin(2\alpha + 2\beta)$;

в) $\sin(4\alpha - 2\beta)$;

б) $\cos(2\alpha - 2\beta)$;

г) $\operatorname{tg}(2\alpha + 4\beta)$.

24 Докажите, что для любого действительного числа m значение выражения

$$\frac{m \sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\sin \alpha} + \frac{m \cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}{\cos \alpha} \text{ не зависит от } \alpha \text{ (но зависит от } m \text{)}.$$

25 Докажите тождество.

а) $8 \cos^4 \alpha + 4 \cos^3 \alpha - 8 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha + 1 = 2 \cos \frac{7\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$;

б) $8 \cos^4 \alpha - 4 \cos^3 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha + 1 = -2 \sin \frac{7\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$.

М

- 26] Выведите формулы, выражающие $\sin 4\alpha$ и $\cos 4\alpha$ через тригонометрические функции угла α (формулы синуса и косинуса четверного угла).
- 27] Выведите формулы синуса и косинуса пятерного угла.
- 28] Вычислите без таблиц и калькулятора: $\operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{ctg} 27^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ$.

1.9. Тожественные преобразования тригонометрических выражений

В предыдущих параграфах было получено большое количество тригонометрических формул и рассматривались примеры решения задач с их помощью. Открываются большие возможности тождественных преобразований тригонометрических выражений. Наряду с тригонометрическими формулами применяются известные вам алгебраические формулы (правила действий с дробями, формулы сокращённого умножения, и т.д.). В этом параграфе мы рассмотрим ещё несколько примеров и обсудим некоторые приёмы работы с тригонометрическими выражениями.

I. Работа с высокими чётными степенями синуса и косинуса (4; 6 и т.д.).

Рекомендуется записать их (высокие чётные степени синуса и/или косинуса) как квадраты в соответствующих степенях, после чего попытаться применить алгебраическую формулу* (если удастся) или формулу понижения степени.

Пример 1. Упростите выражение: $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

Решение.

$$\begin{aligned}\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha)^2 - (\cos^2 \alpha)^2 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \\ &= 1 \cdot (-\cos 2\alpha) = -\cos 2\alpha.\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались алгебраической формулой для разности квадратов, после чего заметили в первой скобке тригонометрическую единицу, а во второй – формулу косинуса двойного угла (с противоположным знаком).

Пример 2. Упростите выражение: $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

Решение.

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha)^2 + (\cos^2 \alpha)^2 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha =$$

* Чаще всего используются формулы сокращённого умножения или одна из формул для суммы квадратов: $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ или $a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab$.

$$= 1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha\right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha.$$

Здесь мы воспользовались алгебраической формулой для суммы квадратов, после чего заметили в скобке тригонометрическую единицу, а произведение $\sin \alpha \cos \alpha$ преобразовали с помощью формулы синуса двойного угла.

Полученное выражение для суммы четвёртых степеней синуса и косинуса можно записать ещё в двух других видах.

Если воспользоваться тем, что $\sin^2 2\alpha = 1 - \cos^2 2\alpha$, то получим:

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 2\alpha.$$

Наконец, ещё одно выражение для суммы четвёртых степеней можно получить, если в любой из двух уже полученных формул применить понижение степени. Скажем, применим его в первой формуле:

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 4\alpha) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha.$$

Вряд ли стоит запоминать полученные формулы, при необходимости их можно быстро вывести.

Заметим, что из первой формулы мгновенно следует оценка сверху для суммы четвёртых степеней синуса и косинуса: $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha \leq 1$, причём равенство достигается в том и только в том случае, когда $\sin 2\alpha = 0$. Из второй формулы следует оценка снизу: $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha \geq \frac{1}{2}$, причём равенство достигается в том и только в том случае, когда $\cos 2\alpha = 0$.

Аналогичные формулы несложно получить для шестых и восьмых степеней, при их выводе активно используются формулы для четвёртых степеней.

II. Сумма (не алгебраическая! только с плюсами!) синусов или косинусов, аргументы которых образуют арифметическую прогрессию, сильно упрощается, если её умножить и разделить на синус полуразности этой прогрессии.

Пример 3. Упростите выражение: $\sin \alpha + \sin 5\alpha + \sin 9\alpha + \sin 13\alpha$.

Решение. Здесь аргументы синусов (α ; 5α ; 9α ; 13α) образуют арифметическую прогрессию с разностью 4α , и полуразность этой прогрессии составляет 2α .

Если $\sin 2\alpha \neq 0$, то умножим и разделим наше выражение на $\sin 2\alpha$. Получим:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin 5\alpha + \sin 9\alpha + \sin 13\alpha &= \\ &= \frac{1}{\sin 2\alpha} (\sin \alpha \sin 2\alpha + \sin 5\alpha \sin 2\alpha + \sin 9\alpha \sin 2\alpha + \sin 13\alpha \sin 2\alpha) = \end{aligned}$$

(теперь преобразуем произведения синусов в алгебраические суммы)

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{2}(\cos \alpha - \cos 3\alpha) + \frac{1}{2}(\cos 3\alpha - \cos 7\alpha) + \frac{1}{2}(\cos 7\alpha - \cos 11\alpha) + \frac{1}{2}(\cos 11\alpha - \cos 15\alpha)}{\sin 2\alpha} \\
&= \frac{1}{2\sin 2\alpha} (\cos \alpha - \cos 3\alpha + \cos 3\alpha - \cos 7\alpha + \cos 7\alpha - \cos 11\alpha + \cos 11\alpha - \cos 15\alpha) = \\
&\quad (\text{все слагаемые в скобках, кроме первого и последнего взаимно уничтожаются}) \\
&= \frac{1}{2\sin 2\alpha} (\cos \alpha - \cos 15\alpha) = \frac{1}{2\sin 2\alpha} \cdot 2\sin 8\alpha \sin 7\alpha = \frac{\sin 8\alpha \sin 7\alpha}{\sin 2\alpha}.
\end{aligned}$$

Осталось отдельно рассмотреть случай, когда $\sin 2\alpha = 0$.

Т.к. $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$, то либо $\sin \alpha = 0$, либо $\cos \alpha = 0$.

Если $\sin \alpha = 0$, то $\alpha = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и все синусы в искомой сумме равны нулю, а значит, и сама сумма равна нулю.

Если же $\cos \alpha = 0$, то либо $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и тогда все синусы в искомой сумме равны 1, а значит, сумма равна 4, либо $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и тогда все синусы в искомой сумме равны -1 , а значит, сумма равна -4 .

В некоторых случаях после упрощения рассматриваемого типа сумм, удаётся ещё упростить и полученное (уже упрощённое!) выражение.

Пример 4. Вычислите без таблиц и калькулятора: $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$.

Решение. Так же, как и в предыдущем примере, аргументы косинусов $\left(\frac{\pi}{7}; \frac{3\pi}{7}; \frac{5\pi}{7}\right)$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{2\pi}{7}$, и полуразностью $\frac{\pi}{7}$. Разделив и умножив на $\sin \frac{\pi}{7} \neq 0$, получим:

$$\begin{aligned}
\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7} &= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} \left(\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} \right) = \\
&= \frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} \left(\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{7} + \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} \right) + \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} \right) \right) = \\
&= \frac{1}{2\sin \frac{\pi}{7}} \left(\sin \frac{2\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7} \right) = \frac{\sin \frac{6\pi}{7}}{2\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \left(\pi - \frac{\pi}{7} \right)}{2\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{\pi}{7}}{2\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Нахождение некоторых сумм синусов или косинусов использует следующую простую идею. Рассмотрим тригонометрическую окружность и впишем в неё правильный n -угольник. Пусть P_α – одна из его вершин. Поскольку вершины правильного n -угольника делят окружность на n равных дуг, остальные его вершины следующие: $P_{\alpha+\frac{2\pi}{n}}$; $P_{\alpha+\frac{4\pi}{n}}$; $P_{\alpha+\frac{6\pi}{n}}$; ...; $P_{\alpha+\frac{2\pi(n-1)}{n}}$. Сумма n векторов, идущих из начала

координат в вершины правильного n -угольника, равна нулевому вектору. А поскольку координаты этих векторов такие же, как координаты вершин, т.е.

$$P_\alpha(\cos \alpha; \sin \alpha); P_{\alpha+\frac{2\pi}{n}}\left(\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right); \sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)\right); P_{\alpha+\frac{4\pi}{n}}\left(\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right); \sin\left(\alpha+\frac{4\pi}{n}\right)\right);$$

и т.д., можно утверждать, что сумма всех абсцисс равна нулю и сумма всех ординат равна нулю:

$$\cos \alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right) + \dots + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi(n-1)}{n}\right) = 0;$$

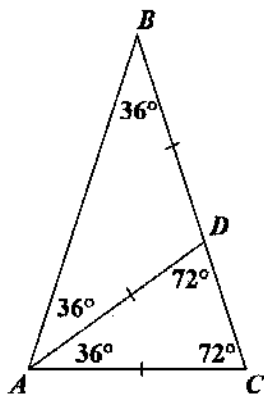
$$\sin \alpha + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left(\alpha + \frac{2\pi(n-1)}{n}\right) = 0.$$

III. Специальные приёмы работы с выражениями, содержащими значения тригонометрических функций некоторых конкретных углов.

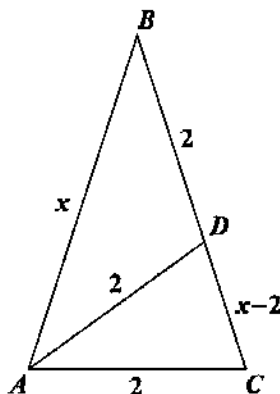
Пример 5. Найдите $\sin 18^\circ$, не пользуясь таблицами и калькулятором.

1) Геометрическое решение.

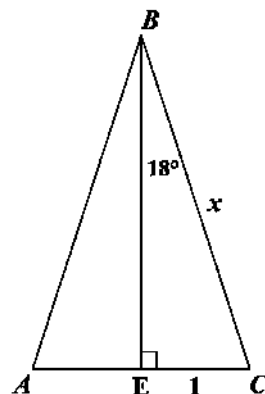
Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углом B при вершине, равным 36° . Тогда углы при основании будут равны по 72° . Проведём биссектрису AD . Тогда треугольники ABD и CAD – равнобедренные и $AC = AD = BD$ (рис. 1.30 а).



а)



б)



в)

Рис. 1.30

Пусть $AC = AD = BD = 2$, $AB = BC = x$ (рис. 1.30 б). Тогда $CD = x - 2$, и из подобия треугольников ABC и CAD имеем: $\frac{x-2}{2} = \frac{2}{x}$, или $x^2 - 2x - 4 = 0$, положительный корень которого $x = \sqrt{5} + 1$. Если теперь E – середина AC , то из прямоугольного треугольника BEC (рис. 1.30 в) находим:

$$\sin 18^\circ = \frac{EC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{(\sqrt{5} + 1) \cdot (\sqrt{5} - 1)} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

2) Тригонометрическое решение.

Поскольку $54^\circ = 90^\circ - 36^\circ$, можно записать: $\cos 54^\circ = \cos(90^\circ - 36^\circ) = \sin 36^\circ$ или $\cos 3 \cdot 18^\circ = \sin 2 \cdot 18^\circ$. Обозначив для удобства $\alpha = 18^\circ$, запишем последнее равенство в виде $\cos 3\alpha = \sin 2\alpha$, или применяя формулы косинуса тройного угла и синуса двойного угла, в виде: $4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$. Разделив обе части последнего равенства на $\cos \alpha = \cos 18^\circ \neq 0$, получим: $4\cos^2 \alpha - 3 = 2\sin \alpha$, или $4(1 - \sin^2 \alpha) - 3 = 2\sin \alpha$. После замены $t = \sin \alpha$ получаем квадратное уравнение $4t^2 + 2t - 1 = 0$. Поскольку $t = \sin \alpha = \sin 18^\circ > 0$, нас интересует только положительный корень этого уравнения, т.е. $t = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$. Итак, установлено, что

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Н

- 1 Найдите $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$, если $\cos 2\alpha = -0,2$.
- 2 Найдите $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, если $\cos 2\alpha = 0,6$.
- 3 Найдите $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, если $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
- 4 Найдите $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$, если $\cos 4\alpha = 0,1$.
- 5 Найдите $\cos 4\alpha$, если $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 0,8$.
- 6 Выведите формулы для суммы и разности шестых степеней синуса и косинуса одного и того же угла.

7 Найдите $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$, если $\cos 2\alpha = 0,6$.

8 Найдите $\sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha$, если $\cos 2\alpha = -\frac{2}{3}$.

9 Упростите.

а) $\frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2 \cos \beta}$; б) $\frac{\cos \alpha \cos \beta + \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) + 3 \cos(\alpha + \beta)}$;

б) $\frac{\frac{1}{2} \sin 3\alpha + \cos^3 \alpha}{\sin^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)}$;

г) $\frac{2 \cos 2\alpha - 1}{\operatorname{ctg}^2 2\alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

10 Вычислите без таблиц и калькулятора.

а) $\frac{\cos 63^\circ \cos 3^\circ - \cos 87^\circ \cos 27^\circ}{\cos 73^\circ \cos 41^\circ - \cos 49^\circ \cos 17^\circ}$;

в) $\frac{\cos^2 14^\circ (1 - 2 \cos 28^\circ)^2}{1 + \sin 6^\circ}$;

б) $\cos^5 12^\circ - 10 \sin^2 12^\circ \cos^3 12^\circ + 5 \sin^4 12^\circ \cos 12^\circ$; г) $\frac{\cos^6 15^\circ - 1}{\sin^2 3^\circ (2 \cos 6^\circ + 2 \cos 12^\circ + 1)^2}$.

11 Докажите тождество.

а) $\frac{3 \sin^4 \alpha - \cos^2 2\alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha} = \frac{24 \sin^2 \alpha}{\cos 4\alpha + 7} - 1$;

б) $\frac{\sin^2 3\alpha + \cos^4 3\alpha}{2 - \sin 6\alpha} = \frac{\sin 6\alpha + 2}{4}$

в) $\frac{\cos \alpha \cos 2\alpha - \cos 3\alpha \cos 4\alpha}{(2 \cos \alpha + 2 \cos 2\alpha + 1)(1 - \cos \alpha)} = \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha$;

г) $\frac{2 - \sin 10\alpha}{\operatorname{tg}^3 5\alpha - \operatorname{tg}^2 5\alpha + \operatorname{tg} 5\alpha} = 2 \cos^2 5\alpha \operatorname{ctg} 5\alpha$.

II

12 Вычислите без таблиц и калькулятора.

а) $\sin^4 \frac{\pi}{8} + \sin^4 \frac{3\pi}{8} + \sin^4 \frac{5\pi}{8} + \sin^4 \frac{7\pi}{8}$;

б) $\cos^3 \frac{\pi}{18} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{3}{4} \cos \frac{\pi}{18} - \cos^3 \frac{\pi}{9} + \frac{3}{4} \cos \frac{\pi}{9}$;

в) $4 \sin \frac{\pi}{72} \cos \frac{5\pi}{72} \cos \frac{6\pi}{72} - \sin \frac{2\pi}{72} + \sin \frac{10\pi}{72}$;

г) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{14} \left(2 \cos \frac{\pi}{14} + \sin \frac{\pi}{7} \right) \operatorname{tg}^2 \frac{3\pi}{14} - 2 \sin \frac{\pi}{14} - \cos \frac{\pi}{7}$.

13 Вычислите без таблиц и калькулятора.

а) $\cos \frac{3\pi}{5} \cos \frac{6\pi}{5}$;

в) $\sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{4\pi}{5}$;

б) $\cos \frac{6\pi}{5} \sin \frac{9\pi}{10}$;

г) $\sin \frac{\pi}{10} \sin \frac{13\pi}{5} \cos \frac{19\pi}{10}$.

14 Упростите.

а) $\operatorname{tg}^6 \alpha - \cos^{-6} \alpha + 3 \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^{-2} \alpha$;

в) $\left(\frac{\cos^{-3} \alpha + \cos^{-2} \alpha}{\cos^{-2} \alpha + \cos^{-1} 3\alpha} - \cos^{-1} \alpha - 1 \right)^{-1}$;

б) $\frac{\operatorname{ctg}^{-1} 3\alpha + \operatorname{tg}^{-1} 3\alpha}{\operatorname{ctg}^{-1} 2\alpha \operatorname{tg}^{-1} 3\alpha - \operatorname{ctg}^{-1} 3\alpha \operatorname{tg}^{-1} 2\alpha}$;

г) $(\cos \alpha \sin^{-2} \alpha - \cos 3\alpha \sin^{-2} 2\alpha)^{-1}$.

15 Докажите тождество.

а) $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha - 1} = \frac{2}{3}$;

в) $\frac{\cos \frac{\alpha}{4} + \cos \frac{\alpha}{3} + \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{6} + 2 \cos \frac{5\alpha}{12} - 1} = \cos \frac{\alpha}{12}$;

б) $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha}{\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \cos^2 \alpha} = \frac{2 - \sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$;

г) $\frac{\cos^{10} \alpha - \sin^{10} \alpha}{44 \cos 4\alpha + \cos 8\alpha + 83} = \frac{\cos 2\alpha}{128}$.

16 Вычислите без таблиц и калькулятора.

а) $\frac{1 + \sin \frac{5\pi}{34} + \cos \frac{3\pi}{17}}{\cos \frac{\pi}{17} \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{17} - 1 \right) \left(1 + 2 \cos \frac{3\pi}{17} \right)}$;

в) $\frac{\cos^3 \frac{3\pi}{8} - \cos^3 \frac{\pi}{8}}{1 - \cos^5 \frac{\pi}{8}}$;

б) $\frac{(\cos^2 6^\circ - \sin^2 6^\circ)(\cos 12^\circ + \cos 24^\circ + \operatorname{tg} 12^\circ)}{\cos 6^\circ \left(2 \sin 6^\circ + \cos 6^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}$;

г) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.

17 Найдите $\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha$, если $\sin \alpha - \cos \alpha = x$.

18 Найдите $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, если $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{5}$.

19 Найдите $\sin^8 \alpha - \cos^8 \alpha$, если $\cos 2\alpha = x$.

20) Найдите $\cos(2\alpha - \beta)$, если $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$, $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \alpha \leq \pi$.

21) Найдите $\frac{\cos(2\alpha - \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2 \sin\left(\beta - \frac{3\alpha}{2}\right)}$, если $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \beta = \frac{\sqrt{5}}{7}$.

22) Найдите $\sin \alpha$, если $\frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2}}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} - \beta\right) - \sin\left(\beta - \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2} \cos \alpha$.

23) Докажите тождество.

а) $\frac{\cos 35^\circ - \cos^7 5^\circ}{\cos 5^\circ - \cos^3 5^\circ} = -\frac{7}{8}(8 \cos 10^\circ + 9 \cos 20^\circ + 7)$;

б) $\frac{\sin^3 10^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin 10^\circ}{5 \sin 10^\circ + \frac{3}{2}} = \frac{1}{4}$;

в) $\frac{\operatorname{tg} 11^\circ - 3 \operatorname{tg} 22^\circ + 4 \operatorname{tg} 33^\circ}{2 \cos 44^\circ + 5} = \frac{2 \sin 11^\circ}{\sin 35^\circ + \cos 11^\circ}$;

г) $\frac{\operatorname{ctg} 2^\circ - 2 \operatorname{ctg} 4^\circ - \operatorname{tg} 1^\circ}{\sin^2 1^\circ} = \frac{4}{\sin 4^\circ}$.

24) Упростите выражение.

а) $\frac{\sin \alpha + \cos(3\alpha - 2\beta) - \cos(\alpha + 2\beta)}{1 - 2 \sin(2\alpha - 2\beta) + 2 \sin 2\beta}$;

б) $\frac{2 \sin\left(2\alpha + \frac{3\beta}{2}\right) + \cos(3\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta)}{\cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(2\alpha + \frac{3\beta}{2}\right)}$;

в) $\frac{\sin \alpha \sin(\alpha + \beta) + \cos(2\alpha + \beta) \cos(\alpha + 2\beta) + \cos \alpha \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) + \cos(3\alpha + 3\beta) + 2 \cos \beta}$;

г) $\frac{2 \sin(5\alpha + 3\beta) + \cos(2\alpha - 2\beta) + \cos(8\alpha + 8\beta)}{4 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5}{2}\alpha - \frac{3}{2}\beta\right) \sin\left(\frac{5}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta + \frac{\pi}{4}\right)}$.

25 Найдите наибольшее значение выражения $\frac{1 + \cos 4\alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

26 Покажите, что $8 \cos 6^\circ = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + \sqrt{3} + \sqrt{15}$.

27 Докажите, что верно сравнение $0 < \frac{1}{19} - \operatorname{tg} 3^\circ < \frac{1}{1000}$.

28 Вычислите значение $\cos 54^\circ$.

М

29 Проверьте равенства:

а) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{24} = \sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$; б) $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 80^\circ - 8 \sin 40^\circ = \sqrt{3}$.

30 Упростите выражение.

а) $\sin \alpha + \sin(\alpha + 72^\circ) + \sin(\alpha + 144^\circ) + \sin(\alpha + 216^\circ) + \sin(\alpha + 288^\circ)$;
 б) $\cos \alpha + \cos(\alpha + 72^\circ) + \cos(\alpha + 144^\circ) + \cos(\alpha - 72^\circ) + \cos(\alpha - 144^\circ)$.

31 Докажите тождество.

а)
$$\frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{4} + \cos \frac{\alpha}{8} - \cos \frac{\alpha}{16}}{2 \cos \frac{\alpha}{4} + 2 \cos \frac{\alpha}{8} + 2 \cos \frac{3\alpha}{8} + 2 \cos \frac{\alpha}{16} + 4 \cos \frac{3\alpha}{16} + 2 \cos \frac{5\alpha}{16} + 3} = \cos \frac{\alpha}{8} - \cos \frac{\alpha}{16};$$

б)
$$\frac{\cos^7 \alpha - \sin^7 \alpha}{13 \sin 2\alpha + \sin 6\alpha + 8 \cos 4\alpha + 24} = \frac{1}{16\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right);$$

в)
$$\frac{3 \cos^3 \frac{\alpha}{3} + 4 \cos^3 \frac{\alpha}{4} + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha}{4 \cos^3 \frac{\alpha}{4} + \frac{9}{4} \cos \frac{\alpha}{3} + \frac{11}{4} \cos \alpha + 1} = 1;$$

г)
$$\frac{6 \operatorname{tg} \alpha - 3 \operatorname{tg} 2\alpha + 2 \operatorname{tg} 3\alpha}{8 - 7 \cos 2\alpha + 5 \cos 4\alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{\cos \alpha + \cos 5\alpha}.$$

32 Упростите выражение:

$$\frac{\cos \alpha \sin 2\alpha - \cos 3\alpha \sin 4\alpha + \cos 5\alpha \sin 6\alpha}{\sin \alpha \cos 2\alpha - \sin 3\alpha \cos 4\alpha + \sin 5\alpha \cos 6\alpha} - \frac{1}{\cos 2\alpha + \cos 8\alpha + \cos 10\alpha}.$$

33 Докажите тождество:

$$\frac{\sin \alpha \sin 2\alpha + \sin 3\alpha \sin 2\alpha + \sin 3\alpha \sin 4\alpha + \sin 4\alpha \sin 5\alpha}{2 \sin \alpha + 2 \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} + \\ + \frac{\cos \alpha \cos 2\alpha - \cos 3\alpha \cos 2\alpha + \cos 3\alpha \cos 4\alpha - \cos 4\alpha \cos 5\alpha}{2 \cos \alpha + 2 \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha} = 2\sqrt{2} \sin \alpha \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right).$$

1.10. Графики тригонометрических функций

В математике принято такое определение

Тригонометрической функцией действительного числа x называется соответствующая тригонометрическая функция угла величиной x радиан.

Естественно возникает вопрос: почему именно радиан, а не, скажем, градусов? Или такой вопрос: а чем же радианы «лучше» градусов? Разобраться с этими вопросами мы сможем позже, при изучении раздела математики, называемого математическим анализом.

В параграфе 1.2 были изучены многие свойства тригонометрических функций. Здесь мы ещё раз вспомним некоторые из них, а также изучим ряд новых свойств. Мы научимся также строить графики тригонометрических функций.

Все тригонометрические функции обладают очень важным свойством, которое называется *периодичностью*.

Функция называется периодической с периодом $T \neq 0$, если для любого числа x из области определения функции числа $x + T$ и $x - T$ также входят в область её определения, причём выполняется равенство: $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$.

Из определения следует, что если число T – один из периодов функции, то для любого целого n число nT тоже является её периодом, и таким образом:

$$f(x) = f(x + nT) \text{ для любого } n \in \mathbb{Z}.$$

Наименьший положительный период функции (если он существует) называется её *основным периодом*. Если T_0 – основной период функции, то все остальные её периоды определяются формулой $T = n T_0$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Периодическая функция может и не иметь основного периода. Например, функция, задаваемая при всех действительных x формулой $f(x) = 0$, является периодической, причём её периодом является любое действительное число, отличное от

нуля. Ясно, что наименьшего положительного периода у этой периодической функции нет.

Из определения периодической функции также следует, что если точка $M(x; y)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$ с периодом T , то поскольку выполняется равенство $y = f(x) = f(x+T) = f(x-T)$, графику этой функции принадлежат также точки $N(x+T, y)$ и $L(x-T, y)$. Это значит, что при параллельном переносе вдоль оси Ox на $|T|$ единиц вправо или влево график периодической функции переходит в себя. Это обстоятельство упрощает построение графиков периодических функций.

Если T – основной период функции (напомним, что тогда $T > 0$), то достаточно построить её график на каком-нибудь интервале длины T , после чего последовательно сдвигая его на T единиц вправо и влево, получать график периодической функции при всех интересующих нас значениях аргумента.

На рис. 1.31 показано, как это можно сделать. Синим цветом изображён график функции $y = f(x)$ с основным периодом T на интервале длиной в период, а затем с помощью описанных сдвигов построен график для других значений аргумента.

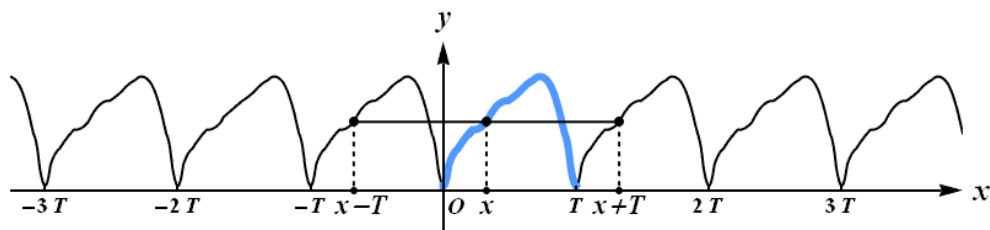


Рис. 1.31

В параграфе 1.2 было доказано следующее утверждение для углов, измеряемых в радианах:

Для любого угла α и любого целого числа n справедливы равенства:

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + 2\pi n) \qquad \cos \alpha = \cos(\alpha + 2\pi n)$$

Вспомнив данное в начале настоящего параграфа определение тригонометрических функций действительного числа, его можно переформулировать следующим образом:

Для любого действительного числа x и любого целого числа n справедливы равенства:

$$\sin x = \sin(x + 2\pi n) \qquad \cos x = \cos(x + 2\pi n)$$

Эти равенства значат, что функции $\cos x$ и $\sin x$ – периодические с периодом $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Докажем, что основным периодом этих функций является число 2π . Рассмотрим для начала функцию $\cos x$. Пусть T – произвольный период этой функ-

ции. Тогда $\cos 0 = \cos(0 + T) = \cos T$. Поскольку $\cos 0 = 1$, отсюда следует, что $\cos T = 1$. Но в параграфе 1.2 (стр. 18) установлено, что $\cos x = 1$ в том и только в том случае, когда $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Отсюда заключаем, что любой период T функции $\cos x$ имеет вид: $T = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому основным (наименьшим положительным) периодом функции $\cos x$ является число 2π .

Аналогично доказывается, что основным (наименьшим положительным) периодом функции $\sin x$ тоже является число 2π .

Теперь докажем, что функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ являются периодическими, причём любой их период имеет вид $T = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Отсюда, в частности, следует, что основным периодом функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ является число π .

Сначала рассмотрим функцию $\operatorname{tg} x$. Утверждение о том, что любой период имеет вид $T = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и только такой вид, следует из доказанных в параграфе 1.2 утверждений, которые можно сформулировать следующим образом:

Для любого действительного числа x , такого, что $\cos x \neq 0$, и любого целого числа n справедливо равенство: $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi n)$

Тангенсы двух чисел равны в том и только том случае, когда эти числа отличаются друг от друга на πn , где $n \in \mathbb{Z}$:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} u \Leftrightarrow x - u = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Абсолютно аналогично утверждение о том, что любой период функции $\operatorname{ctg} x$ имеет вид $T = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и только такой вид, следует из доказанных в параграфе 1.2 аналогичных утверждений для котангенса:

Для любого действительного числа x , такого, что $\sin x \neq 0$, и любого целого числа n справедливо равенство: $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + \pi n)$

Котангенсы двух чисел равны в том и только том случае, когда эти числа отличаются друг от друга на πn , где $n \in \mathbb{Z}$:

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} u \Leftrightarrow x - u = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Далее в этом параграфе мы отдельно рассмотрим каждую из тригонометрических функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$, перечислим её свойства и

построим график. Большинство приводимых фактов доказано в параграфе 1.2. Ранее не доказанные факты мы докажем в этом параграфе.

I. Функция $y = \sin x$.

- 1) Область определения – множество всех действительных чисел.
- 2) Множество значений – интервал $[-1; 1]$.
- 3) Функция $y = \sin x$ нечётная, т.е. для всех $x \in R$ имеем: $\sin(-x) = -\sin x$.
- 4) Функция периодическая с основным периодом 2π .
- 5) Наибольшее значение функции $y = \sin x$ равно 1 и достигается при

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

Наименьшее значение функции $y = \sin x$ равно -1 и достигается при

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z.$$

6) Нули функции* $y = \sin x$: $x = \pi n, \quad n \in Z$.

7) Интервалы знакопостоянства:

$$\sin x > 0 \text{ при } x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n), \quad n \in Z;$$

$$\sin x < 0 \text{ при } x \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n), \quad n \in Z.$$

Действительно, в параграфе 1.2 было установлено, что $\sin x > 0$ в I и II четвертях, т.е. при $x \in (0; \pi)$, и $\sin x < 0$ в III и IV четвертях, т.е. при $x \in (\pi; 2\pi)$, откуда, учитывая периодичность синуса с основным периодом 2π , получаем сформулированные утверждения.

8) Интервалы возрастания и убывания.

$$\text{Функция } y = \sin x \text{ возрастает при } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], \quad n \in Z.$$

$$\text{Функция } y = \sin x \text{ убывает при } x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], \quad n \in Z.$$

Действительно, в параграфе 1.2 было установлено, что синус – возрастающая функция на интервале $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и убывающая функция на интервале $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, откуда, учитывая периодичность синуса с основным периодом 2π , получаем сформулированные утверждения.

* Напомним, что нулями функции называются все значения аргумента, при которых функция принимает значение, равное нулю. Другими словами, нули функции $y = f(x)$ – это корни уравнения $f(x) = 0$.

9) Построим график функции $y = \sin x$.

Для начала построим его для значений аргумента $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (из первой четверти). Это можно сделать по-разному.

Первый путь заключается в том, чтобы вычислить с помощью калькулятора значения функции при нескольких значениях аргумента и заполнить соответствующую таблицу. Сделаем это с шагом $\frac{\pi}{24}$ (это позволит, в частности, включить в нашу таблицу углы из таблицы, рассмотренной в параграфе 1.2). Значения синуса будем вычислять приближённо с точностью до сотых:

x	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{24}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{24}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	0,13	0,26	0,38	0,50	0,61	0,71	0,79	0,87	0,92	0,97	0,99	1

Нанесём полученные точки на координатную плоскость (рис. 1.32) и соединим их плавной линией (рис. 1.33). Получим график функции $y = \sin x$ для значений аргумента $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

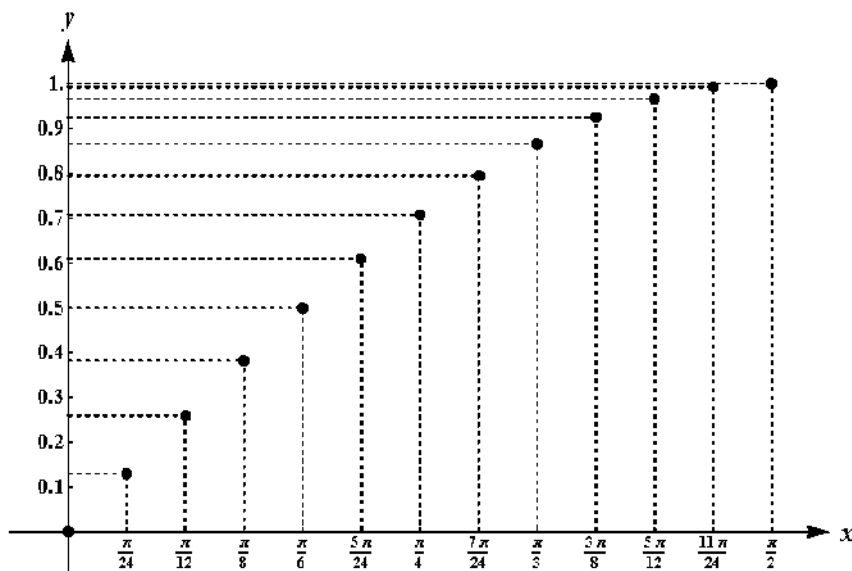


Рис. 1.32

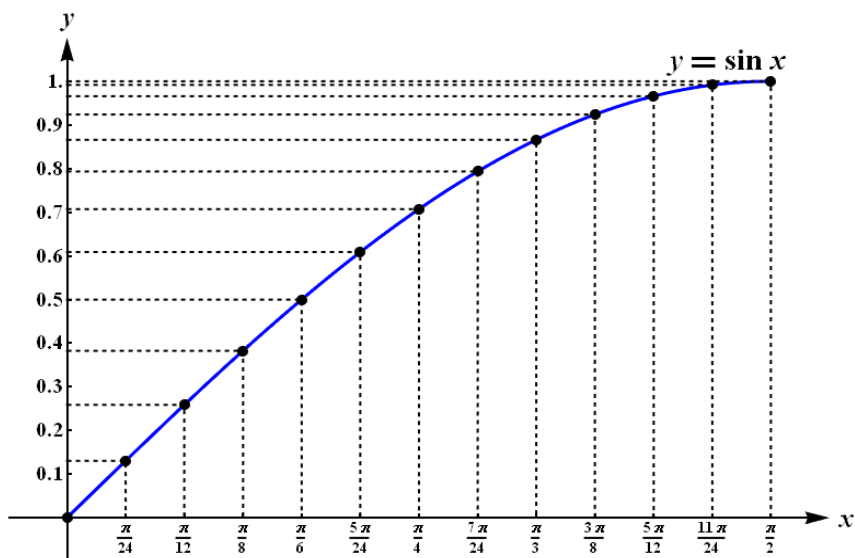


Рис. 1.33

Второй путь заключается в построении графика с помощью тригонометрической окружности. Разделим первую четверть окружности на 12 равных частей (точки деления на рис. 1.34 не подписаны, т.к. они те же самые, что и в таблице, а нанесение подписей на рисунок загромодило бы его до полной нечитаемости). Отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

оси абсцисс тоже разделим на 12 равных частей (они подписаны не все по той же причине). После этого перенесём ординаты точек деления окружности в точки с соответственными абсциссами в системе координат xOy (рис. 1.34) и соединим их плавной линией. Как и следовало ожидать, получили такой же график, как и на рис. 1.33.

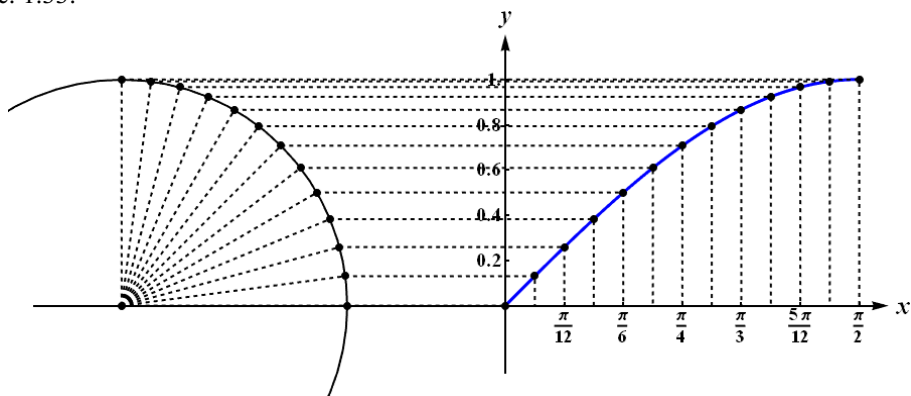


Рис. 1.34

Зная график функции $y = \sin x$ для значений аргумента $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, можно получить его для значений аргумента $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Для этого воспользуемся одной из формул приведения $\sin(\pi - x) = \sin x$. Записанное равенство значит, что значения функции $y = \sin x$ для значений аргумента, одинаково удалённых от концов отрезка $[0; \pi]$ одинаковы. Отсюда следует, что на отрезке $[0; \pi]$ график функции $y = \sin x$ симметричен относительно вертикальной прямой, проходящей через середину этого отрезка, т.е. прямой $x = \frac{\pi}{2}$ (рис. 1.35).

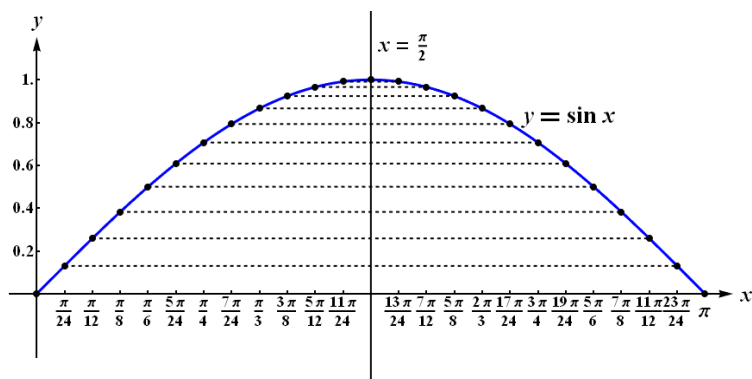


Рис. 1.35

Далее, зная график функции $y = \sin x$ для значений аргумента $x \in [0; \pi]$, можно получить его для значений аргумента $x \in [-\pi; 0]$, воспользовавшись тем, что функция $y = \sin x$ нечётная, а значит, её график симметричен относительно начала координат (рис. 1.36).

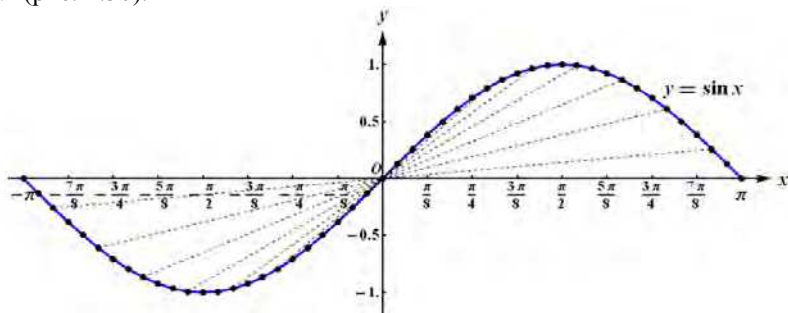


Рис. 1.36

Таким образом, мы научились строить график функции $y = \sin x$ для значений аргумента $x \in [-\pi; \pi]$, т.е. на отрезке, длина которого равна 2π – основному периоду этой функции. Теперь, используя периодичность, можно получить график функции $y = \sin x$ на всей области определения (рис. 1.37).

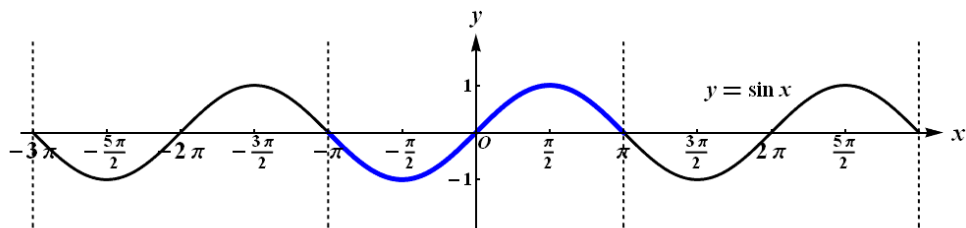


Рис. 1.37

Сделаем одно важное замечание. Чаше всего вам придётся строить график функции $y = \sin x$ на клетчатой бумаге. Удобно за единицу взять две клеточки.

Тогда, поскольку с большой точностью $\frac{\pi}{2} \approx 1,5$, то одной клеточке на оси абсцисс будет соответствовать $\frac{\pi}{6}$, двум клеточкам $\frac{\pi}{3}$, трём $\frac{\pi}{2}$, и т.д. Кроме того, полезно знать, что при такой разметке в угловой клеточке I четверти график функции $y = \sin x$ идёт практически по диагонали этой клеточки. График функции $y = \sin x$ на клетчатой бумаге изображён на рис. 1.38.

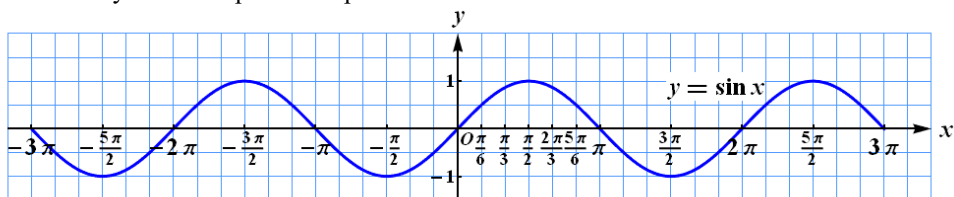


Рис. 1.38

II. Функция $y = \cos x$.

- 1) Область определения – множество всех действительных чисел.
- 2) Множество значений – интервал $[-1; 1]$.
- 3) Функция $y = \cos x$ чётная, т.е. для всех $x \in \mathbb{R}$ имеем: $\cos(-x) = \cos x$.
- 4) Функция периодическая с основным периодом 2π .
- 5) Наибольшее значение функции $y = \cos x$ равно 1 и достигается при $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Наименьшее значение функции $y = \cos x$ равно -1 и достигается при $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

6) Нули функции $y = \cos x$: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

7) Интервалы знакопостоянства:

$\cos x > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$;

$\cos x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

Действительно, в параграфе 1.2 было установлено, что $\cos x > 0$ в I и IV четвертях, т.е. при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, и $\cos x < 0$ во II и III четвертях, т.е. при $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, откуда, учитывая периодичность косинуса с основным периодом 2π , получаем сформулированные утверждения.

8) Интервалы возрастания и убывания.

Функция $y = \cos x$ возрастает при $x \in [\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, $n \in Z$.

Функция $y = \cos x$ убывает при $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$.

Действительно, в параграфе 1.2 было установлено, что косинус – возрастающая функция на интервале $[\pi; 2\pi]$ и убывающая функция на интервале $[0; \pi]$, откуда, учитывая периодичность косинуса с основным периодом 2π , получаем сформулированные утверждения.

9) Построим график функции $y = \cos x$.

Для этого воспользуемся одной из формул приведения $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Отсюда вытекает, что график функции $y = \cos x$, т.е. график функции $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, может быть получен из графика функции $y = \sin x$ сдвигом вдоль оси Ox на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево, т.е. параллельным переносом на вектор $\vec{m}\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

График функции $y = \cos x$ изображён на рис. 1.39.

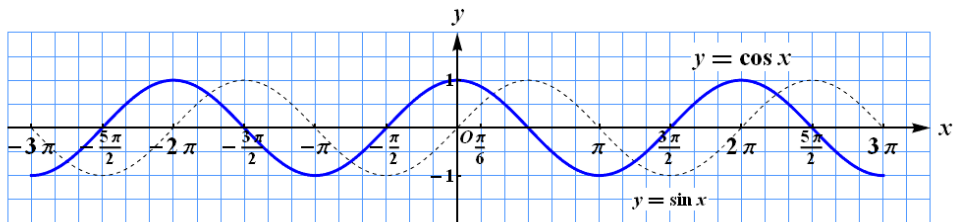


Рис. 1.39

III. Функция $y = \operatorname{tg} x$.

1) Область определения – множество всех действительных чисел x , таких что $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) Множество значений – множество всех действительных чисел.

3) Функция $y = \operatorname{tg} x$ нечётная, т.е. для всех $x \in \mathbb{R}$, таких что $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, имеем: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

4) Функция периодическая с основным периодом π .

5) У функции $y = \operatorname{tg} x$ нет наименьшего и наибольшего значений – она может принимать любое действительное значение.

6) Нули функции $y = \operatorname{tg} x$: $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

7) Интервалы знакопостоянства:

$\operatorname{tg} x > 0$ при $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\operatorname{tg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n \right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Действительно, в параграфе 1.2 было установлено, что $\operatorname{tg} x > 0$ в I четверти, т.е. при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$, и $\operatorname{tg} x < 0$ в IV четверти, т.е. при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0 \right)$, откуда, учитывая периодичность тангенса с основным периодом π , получаем сформулированные утверждения.

8) Интервалы возрастания и убывания.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на каждом из следующих интервалов с длиной, равной основному периоду: $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

Действительно, в параграфе 1.2 было установлено, что тангенс – возрастающая функция на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, откуда, учитывая периодичность тангенса с основным периодом π , получаем сформулированное утверждение.

9) Построим график функции $y = \operatorname{tg} x$.

Для этого поступим примерно так же, как при построении графика функции $y = \sin x$.

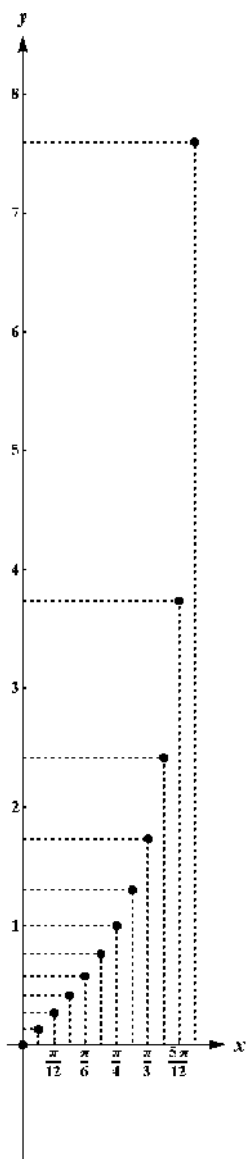
Для начала построим график для значений аргумента $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ (из первой четверти). Сделаем это двумя способами.

Первый способ. Вычислим с помощью калькулятора значения функции при нескольких значениях аргумента и заполним соответствующую таблицу. Сделаем это с шагом $\frac{\pi}{24}$ (это позволит, в частности, включить в нашу таблицу углы из таблицы, рассмотренной в параграфе 1.2). Значения тангенса будем вычислять приближённо с точностью до сотых:

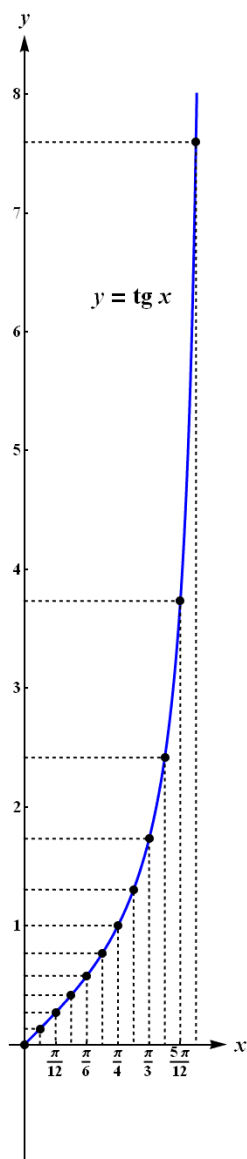
x	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{24}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{24}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$
y	0	0,13	0,27	0,41	0,58	0,77	1	1,30	1,73	2,41	3,73	7,60

Нанесём полученные точки на координатную плоскость и соединим их плавной линией. Получим график функции $y = \operatorname{tg} x$ для значений аргумента $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

(рис. 1.40). При приближении значений аргумента к $\frac{\pi}{2}$ значения функции $y = \operatorname{tg} x$ будут неограниченно увеличиваться. Говорят, что прямая $x = \frac{\pi}{2}$ является *вертикальной асимптотой* этого графика.



a)



б)

Рис. 1.40

Второй способ построения графика функции $y = \operatorname{tg} x$ для значений аргумента $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ – с помощью тригонометрической окружности и оси тангенсов.

Разделим первую четверть окружности на 12 равных частей (точки деления на рис. 1.41 не подписаны, по тем же причинам, что и при построения графика синуса).

Интервал $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ оси абсцисс тоже разделим на 12 равных частей (они тоже не подписаны). После этого перенесём ординаты точек с оси тангенсов в точки с соответственными абсциссами в системе координат xOy (рис. 1.41) и соединим их плавной линией. Как и следовало ожидать, получили такой же график, как и на рис. 1.40.

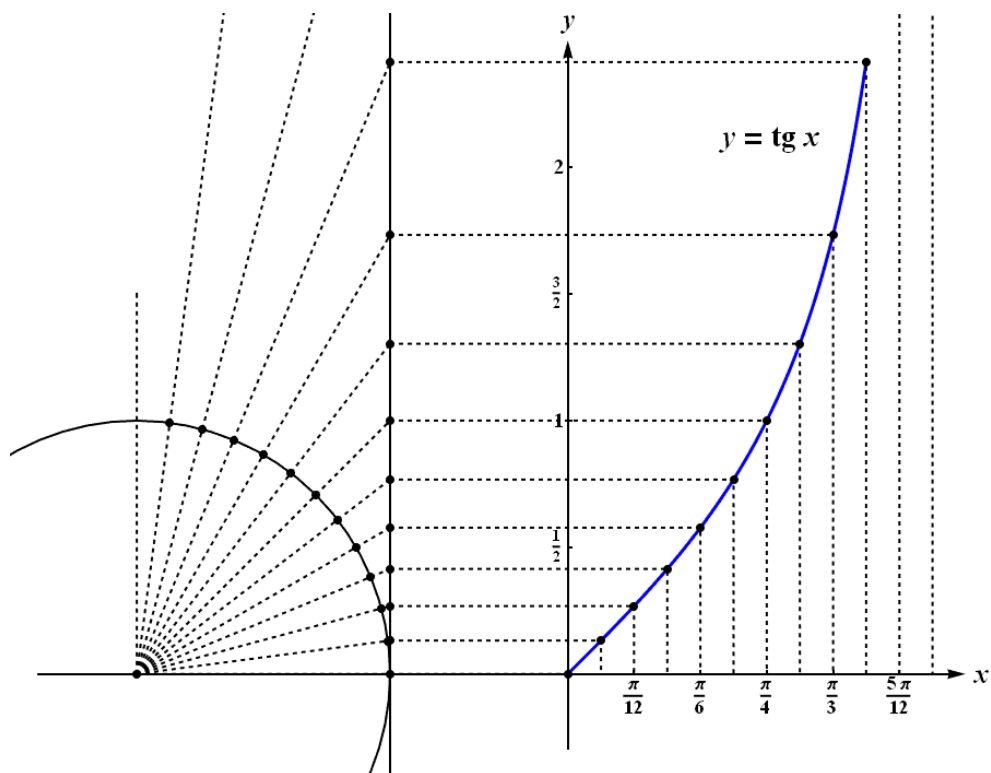


Рис. 1.41

Зная график функции $y = \operatorname{tg} x$ для значений аргумента $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, можно получить его для значений аргумента $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$. Для этого воспользуемся тем, что функция $y = \operatorname{tg} x$ нечётная, а значит её график симметричен относительно начала координат (рис. 1.42).

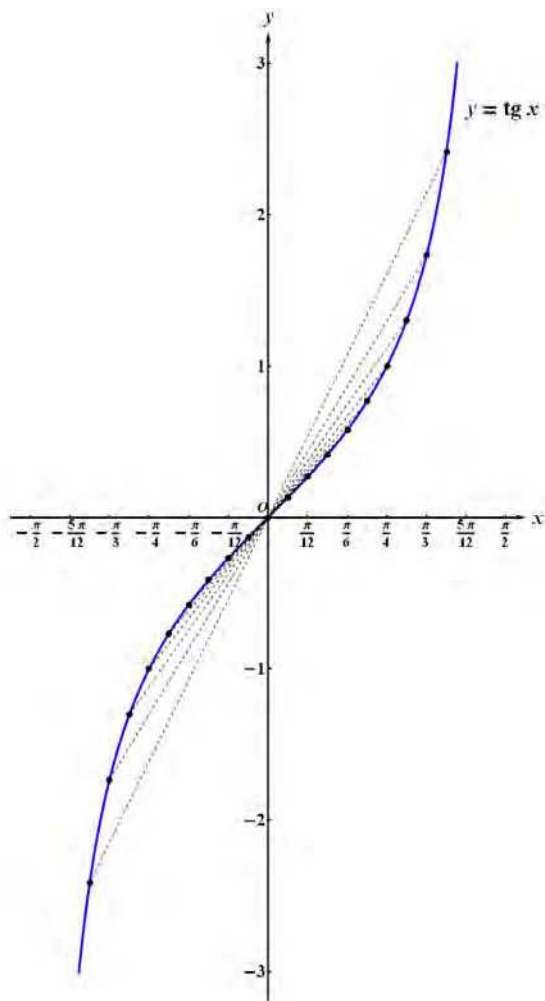


Рис. 1.42

Таким образом, мы научились строить график функции $y = \operatorname{tg} x$ для значений аргумента $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, т.е. на интервале, длина которого равна π – основному периоду этой функции. Теперь, используя периодичность, можно получить график функции $y = \operatorname{tg} x$ на всей области определения (рис. 1.43). Прямые $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ являются вертикальными асимптотами графика.

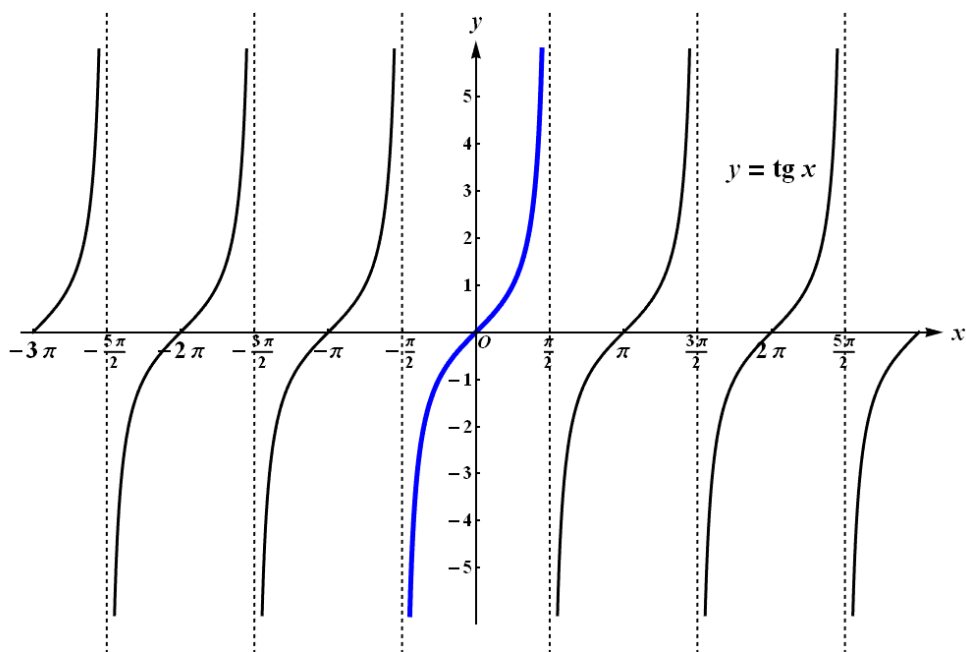


Рис. 1.43

Чаще всего вам придётся строить график функции $y = \operatorname{tg} x$ на клетчатой бумаге. При этом удобно делать разметку осей так же, как описано выше для графика синуса. В первой угловой клеточке I четверти график функции $y = \operatorname{tg} x$, так же, как и график функции $y = \sin x$ идёт практически по диагонали этой клеточки (отличие в том, что график синуса идёт немного ниже этой диагонали, а график тангенса – немного выше). График функции $y = \operatorname{tg} x$ на клетчатой бумаге изображён на рис. 1.44.

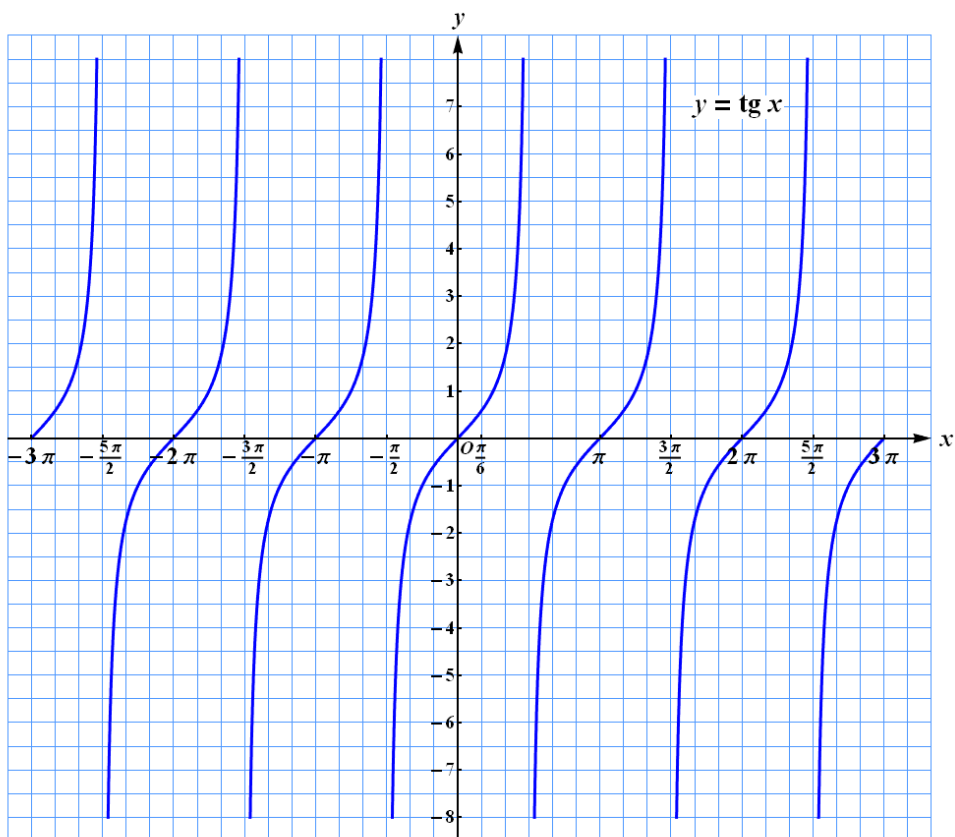


Рис. 1.44

IV. Функция $y = \operatorname{ctg} x$.

1) Область определения – множество всех действительных чисел x , таких что $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) Множество значений – множество всех действительных чисел.

3) Функция $y = \operatorname{ctg} x$ нечётная, т.е. для всех $x \in \mathbb{R}$, таких что $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, имеем: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$.

4) Функция периодическая с основным периодом π .

5) У функции $y = \operatorname{ctg} x$ нет наименьшего и наибольшего значений – она может принимать любое действительное значение.

6) Нули функции $y = \operatorname{ctg} x$: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

7) Интервалы знакопостоянства:

$\operatorname{ctg} x > 0$ при $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$, $n \in Z$;

$\operatorname{ctg} x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n \right)$, $n \in Z$.

Действительно, в параграфе 1.2 было установлено, что $\operatorname{ctg} x > 0$ в I четверти, т.е. при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$, и $\operatorname{ctg} x < 0$ во II четверти, т.е. при $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi \right)$, откуда, учитывая периодичность котангенса с основным периодом π , получаем сформулированные утверждения.

8) Интервалы возрастания и убывания.

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на каждом из следующих интервалов с длиной, равной основному периоду: $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in Z$.

Действительно, в параграфе 1.2 было установлено, что котангенс – убывающая функция на интервале $(0; \pi)$, откуда, учитывая периодичность котангенса с основным периодом π , получаем сформулированное утверждение.

9) Построим график функции $y = \operatorname{ctg} x$.

Для этого воспользуемся одной из формул приведения $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$. Отсюда вытекает, что график функции $y = \operatorname{ctg} x$, т.е. график функции $y = -\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + x \right)$, может быть получен из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ сдвигом вдоль оси Ox на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево, т.е. параллельным переносом на вектор $\vec{m} \left(-\frac{\pi}{2}; 0 \right)$, с последующим отражением относительно оси абсцисс.

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ изображён на рис. 1.45. Прямые $x = \pi n$, $n \in Z$ являются вертикальными асимптотами графика.

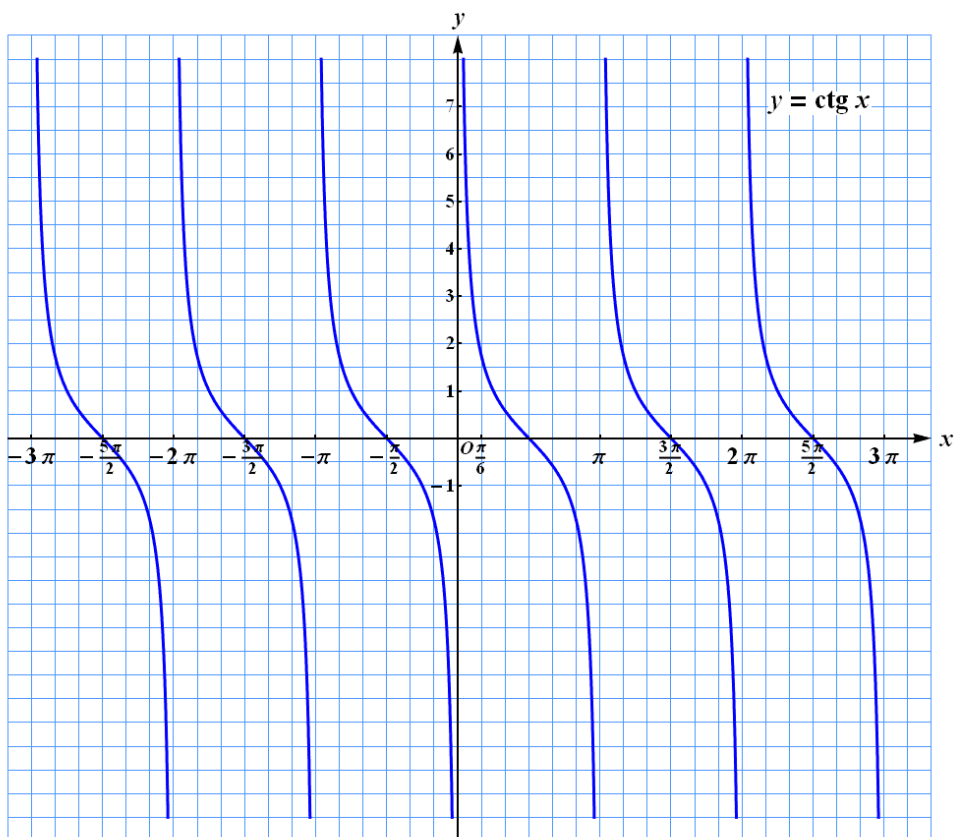


Рис. 1.45

Н

- 1 Что называется тригонометрической функцией действительного числа?
- 2 Укажите несколько действительных чисел x , таких что:
 - а) $\sin x = 0$; б) $\sin x = 1$; в) $\sin x = -1$; г) $\sin x > 0$; д) $\sin x < 0$.
- 3 Укажите несколько действительных чисел x , таких что:
 - а) $\cos x = 0$; б) $\cos x = 1$; в) $\cos x = -1$; г) $\cos x > 0$; д) $\cos x < 0$.

4 Укажите несколько действительных чисел x , таких что:

- а) $\operatorname{tg} x$ не существует; б) $\operatorname{tg} x = 0$; в) $\operatorname{tg} x > 0$; г) $\operatorname{tg} x < 0$.

5 Укажите несколько действительных чисел x , таких что:

- а) $\operatorname{ctg} x$ не существует; б) $\operatorname{ctg} x = 0$; в) $\operatorname{ctg} x > 0$; г) $\operatorname{ctg} x < 0$.

6 Запишите область определения и множество значений функции.

- а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$; в) $y = \operatorname{tg} x$; г) $y = \operatorname{ctg} x$.

7 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

- а) Какая функция называется периодической?
б) Что называется периодом функции?
в) Может ли периодическая функция иметь единственный период?
г) Что называется основным периодом функции?
д) Всякая ли периодическая функция имеет основной период?

8 Определите знак числа.

- а) $\sin 5$; б) $\sin \frac{17\pi}{7}$; в) $\sin \frac{160\pi}{183}$; г) $\sin(\sqrt{\pi} - 5)$; д) $\sin 12$.

9 Определите знак числа.

- а) $\cos 4,5$; б) $\cos \frac{25}{4}$; в) $\cos(2\pi - 1)$; г) $\cos \frac{22\pi}{3}$; д) $\cos 7$.

10 Определите знак числа.

- а) $\operatorname{tg} 3,2$; б) $\operatorname{tg} \frac{13\pi}{5}$; в) $\operatorname{tg} 2\sqrt{3}$; г) $\operatorname{tg} 9$; д) $\operatorname{tg}(6 - 2\pi)$.

11 Определите знак числа.

- а) $\operatorname{ctg} 1,5$; б) $\operatorname{ctg} 4$; в) $\operatorname{ctg} \sqrt{6}$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - 11\right)$; д) $\operatorname{ctg} \frac{19\pi}{13}$.

12 Сравните.

- а) $\sin 2$ и $\sin 3$; в) $\sin 6$ и $\sin 5$; д) $\sin 1,8$ и $\sin 2,5$;
б) $\sin \frac{3}{2}$ и $\sin \frac{3}{4}$; г) $\sin 5$ и $\sin 5,5$; е) $\sin \sqrt{3}$ и $\sin \sqrt{5}$.

13 Сравните.

- а) $\cos 4$ и $\cos 4,5$; в) $\cos \frac{12\pi}{5}$ и $\cos \frac{11\pi}{5}$; д) $\cos \sqrt{7}$ и $\cos \sqrt{6}$;
б) $\cos \frac{11}{2}$ и $\cos 6$; г) $\cos 3,7$ и $\cos 4,5$; е) $\cos 3,3$ и $\cos 3,6$.

14 Сравните.

- а) $\operatorname{tg} 2$ и $\operatorname{tg} 3$; в) $\operatorname{tg} \frac{22}{5}$ и $\operatorname{tg} \frac{17}{5}$; д) $\operatorname{tg} 5,2$ и $\operatorname{tg} 5,9$;
б) $\operatorname{tg} 3,7$ и $\operatorname{tg} \frac{7}{2}$; г) $\operatorname{tg} \sqrt{8}$ и $\operatorname{tg} \frac{3}{\sqrt{2}}$; е) $\operatorname{tg} 6,3$ и $\operatorname{tg} 7$.

15 Сравните.

- а) $\operatorname{ctg} 1$ и $\operatorname{ctg} 1,5$; в) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{7}$ и $\operatorname{ctg} \frac{6\pi}{11}$; д) $\operatorname{ctg} \frac{23}{9}$ и $\operatorname{ctg} \frac{23}{10}$;
б) $\operatorname{ctg}(\sqrt{3}-1)$ и $\operatorname{ctg} 1$; г) $\operatorname{ctg} 0,2$ и $\operatorname{ctg} \frac{6}{5}$; е) $\operatorname{ctg} \sqrt{2\pi}$ и $\operatorname{ctg} \sqrt{\pi}$.

16 а) Докажите, что функция $y = \sin x$ является периодической.

- б) Назовите все периоды функции $y = \sin x$.
в) Назовите основной период функции $y = \sin x$.
г) Докажите, что названный вами период основной.

17 а) Докажите, что функция $y = \cos x$ является периодической.

- б) Назовите все периоды функции $y = \cos x$.
в) Назовите основной период функции $y = \cos x$.
г) Докажите, что названный вами период основной.

18 а) Докажите, что функция $y = \operatorname{tg} x$ является периодической.

- б) Назовите все периоды функции $y = \operatorname{tg} x$.
в) Назовите основной период функции $y = \operatorname{tg} x$.
г) Докажите, что названный вами период основной.

19 а) Докажите, что функция $y = \operatorname{ctg} x$ является периодической.

- б) Назовите все периоды функции $y = \operatorname{ctg} x$.
в) Назовите основной период функции $y = \operatorname{ctg} x$.
г) Докажите, что названный вами период основной.

20 Постройте график функции.

- а) $y = \sin x + 1$; в) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; д) $y = \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$;
б) $y = \cos x - 2$; г) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; е) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{3}{4}$.

21 Постройте график функции.

- а) $y = \operatorname{tg} x - 2$; в) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; д) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$;
б) $y = \operatorname{ctg} x + \frac{3}{2}$; г) $y = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{5\pi}{3}\right)$; е) $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3$.

П

22 Постройте график функции.

- а) $y = \sin \frac{x}{3}$; в) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$; д) $y = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + 1$;
б) $y = 2 \cos 2x$; г) $y = \cos\left(3x - \frac{5\pi}{6}\right)$; е) $y = 3 \cos\left(\frac{5\pi}{4} - 2x\right)$.

23 Постройте график функции.

- а) $y = \operatorname{tg} 2x$; в) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{11\pi}{6} - 2x\right)$; д) $y = 1 - 2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;
б) $y = \frac{1}{3} \operatorname{ctg} x$; г) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$; е) $y = \frac{3}{2} \operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$.

24 Функция Дирихле $D(x)$ задаётся следующим образом:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число.} \end{cases}$$

- а) Докажите, что функция Дирихле периодическая;
б) Докажите, что функция Дирихле не имеет наименьшего положительного периода.

25 Функция $h(x)$ периодическая с основным периодом 5 и при $x \in [-1; 4)$ задаётся формулой: $h(x) = x^2 - 2x$.

- а) Вычислите $h(0)$; $h(7)$; $h(-3)$; $h(2014)$; $h(-712)$.
б) Постройте график функции $y = h(x)$.

26 Функция $h(x)$ периодическая с основным периодом 2 и при $x \in [-1; 1]$ задаётся формулой: $h(x) = (x-1)(x+1)$.

- а) Вычислите $h\left(\frac{1}{2}\right)$; $h(27)$; $h\left(-\frac{17}{3}\right)$; $h(10^6)$; $h(-\sqrt{5})$.
б) Постройте график функции $y = h(x)$.

27 Функция $h(x)$ периодическая с основным периодом 10 и при $x \in (-2; 8]$ задаётся формулой: $h(x) = \frac{x}{4} - 1$.

а) Вычислите $h(5)$; $h(-2)$; $h(113)$; $h\left(-\frac{19}{4}\right)$; $h(10\sqrt{2})$.

б) Постройте график функции $y = h(x)$.

28 Функция $h(x)$ периодическая с основным периодом $\frac{5}{2}$ и при $x \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right)$ задаётся формулой: $h(x) = 4 + 5x + 2x^2$.

а) Вычислите $h(2)$; $h\left(-\frac{17}{2}\right)$; $h(100)$; $h(-10 - \sqrt{3})$; $h\left(11\frac{1}{3}\right)$.

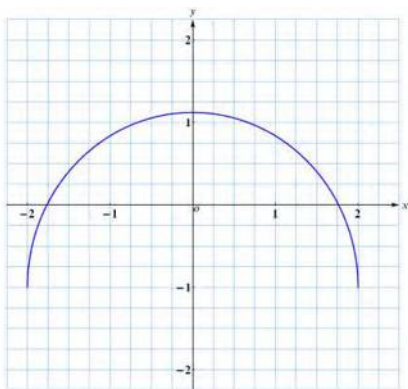
б) Постройте график функции $y = h(x)$.

29 Функция $h(x)$ периодическая с основным периодом $3\sqrt{3}$ и при $x \in [-\sqrt{3}; 2\sqrt{3}]$ задаётся формулой: $h(x) = \frac{4x}{9\sqrt{3}} - \frac{4x^2}{27} + \frac{8}{9}$.

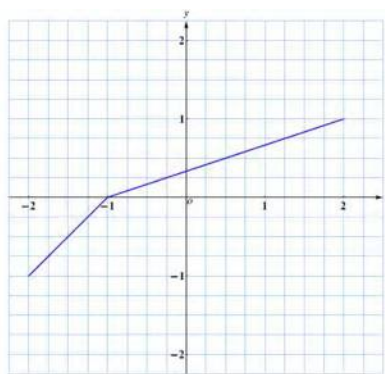
а) Вычислите $h\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $h(5\sqrt{3})$; $h(-15)$; $h\left(\frac{87}{10}\right)$; $h(-1000)$.

б) Постройте график функции $y = h(x)$.

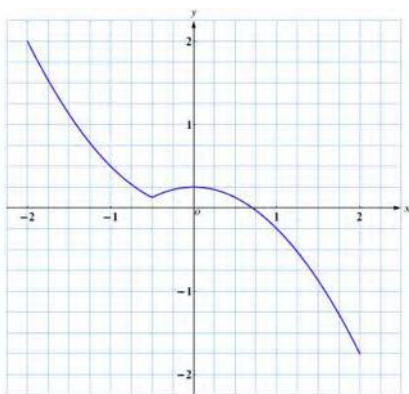
30 На рис. 1.46 изображены графики функций, заданных на одном из их периодов – отрезке $x \in [-2; 2]$. Постройте графики данных функций на отрезке $x \in [-4; 6]$.



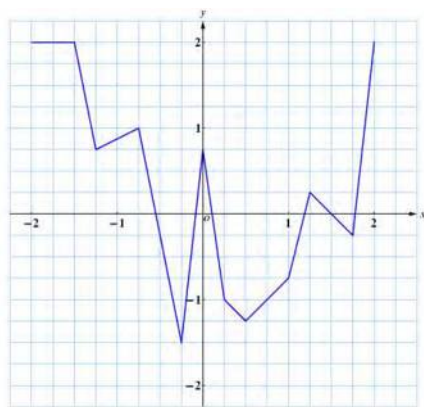
а)



б)



в)



г)

Рис. 1.46

М

31 Докажите, что если функция $y = f(x)$ – периодическая с основным периодом T , то функция $y = k \cdot f(mx + a) + b$, где k, m, a, b – действительные числа, $k \neq 0$, $m \neq 0$, тоже периодическая, причём её основной период равен $\frac{T}{|m|}$.

32 Функция $g(x)$ периодическая с основным периодом 1 и при $x \in [-1; 0)$ задаётся формулой: $h(x) = 2x + 3$. Постройте график функции $y = g(x)$.

Задайте эту функцию формулой на интервалах:

- а) $[0; 1)$; б) $[5; 6)$; в) $[n; n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

33 Функция $h(x)$ периодическая с основным периодом 2 и при $x \in [0; 2)$ задаётся формулой: $h(x) = x^2 - 2x - 1$. Постройте график функции $y = g(x)$.

Задайте эту функцию формулой на интервалах:

- а) $[2; 4)$; б) $[-6; -4)$; в) $[2n; 2n+2)$, $n \in \mathbb{Z}$.

34 Пусть выражение $[x]$ обозначает целую часть числа x , т. е. наибольшее целое число, меньшее или равное x .

а) Верно ли что функции $y = [\sin x]$, $y = [\cos x]$, $y = [\operatorname{tg} x]$, $y = [\operatorname{ctg} x]$ являются периодическими?

б) Если да, то какие периоды они имеют?

в) Постройте графики функций $y = [\sin x]$; $y = [\cos x]$; $y = [\cos x] + [\sin x]$.

1.11. Обратные тригонометрические функции

Вы знаете, что функция выражает зависимость одной величины от другой.

Скажем, если автомобиль движется с постоянной скоростью 40 км/ч, то зависимость пройденного расстояния s (в километрах) от времени t (в часах) задаётся формулой $s = 40t$. Таким образом, расстояние s является функцией аргумента t (времени). Но в описываемой ситуации нас может интересовать также зависимость времени движения t (в часах) от пройденного расстояния s (в километрах). Мы знаем, что такая зависимость задаётся формулой $t = \frac{s}{40}$. Тем самым, время движения t

является функцией аргумента s (расстояния). Эта зависимость времени от расстояния часто называется обратной по отношению к начальной зависимости расстояния от времени. Хорошо понятно, что здесь имеется взаимность: если начальной считать зависимость времени от расстояния, то обратной для неё будет зависимость расстояния от времени.

Этот простой пример подводит нас к очень важному в математике понятию *обратной функции*.

Пусть имеется функция $f(x)$, у которой область определения M и множество значений P . Если функция $f(x)$ такова, что её значения при различных значениях аргумента различны, т.е. $f(u) \neq f(v)$ при $u \neq v$ (или, по-другому, $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$), то для любого числа $t \in P$ существует единственное число $z \in M$, такое что $t = f(z)$. Тем самым задан закон, который каждому $t \in P$ ставит в соответствие единственное, вполне определённое значение $z \in M$. А это значит, что задана функция с областью определения P . Эта функция называется обратной к исходной функции f и традиционно обозначается f^{-1} . Понятно, что множеством значений функции f^{-1} является множество M – область определения функции f . Функция, имеющая обратную, называется *обратимой*.

Важнейшим условием для обратимости функции f , т.е. существования обратной функции, является требование $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$. Оно называется *взаимной однозначностью* функции f , или более привычно, функции $f(x)$. Его можно сформулировать и по-другому: каждое своё значение функция $f(x)$ принимает в единственной точке. А можно и так: При любом t из области значений функции $f(x)$ уравнение $f(x) = t$ имеет единственный корень. Более того, корень x этого

уравнения и является значением обратной функции при аргументе, равном t : $x = f^{-1}(t)$.

Именно на последней формулировке основан простой практический способ нахождения обратной функции в некоторых ситуациях.

Пример 1. Найдите функцию, обратную к функции $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$.

Решение. Заметим, что пока мы даже не знаем, существует ли у данной функции обратная. Очень часто ответ на этот вопрос выясняется в процессе решения.

Прежде всего, заметим, что $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$. Возьмём любое действительное число t и выясним, имеет ли корень уравнение $f(x) = t$, и единственный ли. Запишем уравнение в виде $\frac{2x+1}{x-2} = t$ и начнём его преобразовывать:

$$\frac{2x+1}{x-2} = t; \quad 2x+1 = xt-2t; \quad 2t+1 = xt+2x; \quad x(t+2) = 2t-1.$$

Если $t = -2$, то уравнение принимает вид $0 = -5$ и решений не имеет. Это значит, что число -2 не входит в множество значений функции $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$. При $t \neq -2$ уравнение имеет решение, поскольку на выражение $t+2 \neq 0$ можно разделить и найти x . Таким образом, мы установили, что множество значений функции $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ состоит из всех действительных чисел, кроме числа -2 : $E(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$.

Кроме того, деля обе части равенства $x(t+2) = 2t-1$ на $t+2 \neq 0$, получим: $x = \frac{2t-1}{t+2}$. Корень x уравнения $f(x) = t$ оказался единственным, значит, обратная функция существует и задаётся формулой $x = f^{-1}(t)$, т.е. $f^{-1}(t) = \frac{2t-1}{t+2}$. Переходя к более привычному обозначению аргумента буквой x , запишем обратную функцию в виде: $f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x+2}$.

При этом $D(f^{-1}) = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$; $E(f^{-1}) = (-\infty; 2) \cup (2; \infty)$

Понятно, что это общее свойство взаимно обратных функций:

Если функции f и f^{-1} взаимно обратные, то $D(f^{-1}) = E(f)$ и $E(f^{-1}) = D(f)$

Для графиков взаимно обратных функций выполняется ещё одно очень важное свойство.

Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны друг другу относительно прямой $y = x$ (биссектрисы первого и третьего координатных углов).

Для доказательства этой симметричности рассмотрим на графике функции $y = f(x)$ точку $(u; v)$. Это значит, что $v = f(u)$. По определению обратной функции отсюда следует, что $u = f^{-1}(v)$, т.е. точка $(v; u)$ лежит на графике функции $y = f^{-1}(x)$.

Осталось убедиться, что точки $A(u; v)$ и $B(v; u)$ симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Рассмотрим сначала случай, когда числа u и v положительные, т.е. точки $A(u; v)$ и $B(v; u)$ лежат в I четверти. Нарисуем чертёж, предположив, что $u > v$ (случай $u < v$ рассматривается аналогично, а в случае $u = v$ всё сразу ясно):

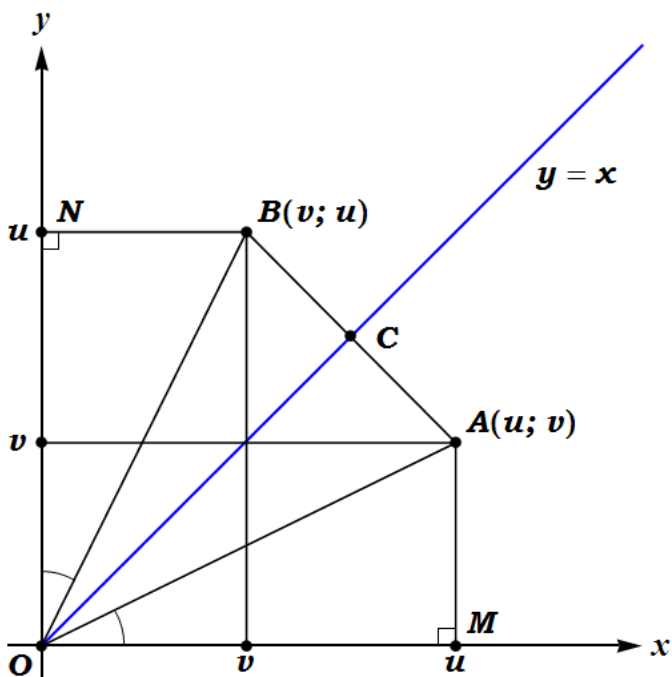


Рис. 1.47

Прямоугольные треугольники OAM и OBN равны по двум катетам ($OM = ON = u$, $AM = BN = v$).

Отсюда следует, что $OA = OB$ и $\angle AOM = \angle BON$, а поскольку $\angle AOC = 45^\circ - \angle AOM$, $\angle BOC = 45^\circ - \angle BON$, то $\angle AOC = \angle BOC$. Таким образом, треугольник AOB – равнобедренный с основанием AB , а отрезок OC в нём является биссектрисой, проведённой к основанию. Как вы знаете из курса геометрии, этот отрезок является также высотой и медианой, т.е. $OC \perp AB$ и $OC = CB$. А это как раз и значит, что точки $A(u; v)$ и $B(v; u)$ симметричны относительно прямой $y = x$, и доказательство для положительных u и v закончено.

Случаи других знаков чисел u и v рассматриваются аналогично.

Доказанное свойство позволяет быстро строить график обратной функции, если известен график самой функции.

Выше мы установили, что необходимым и достаточным условием существования обратной функции является взаимная однозначность исходной функции.

На практике часто удобно использовать следующую теорему, являющуюся достаточным условием существования обратной функции:

Если функция $y = f(x)$ возрастающая (убывающая) на множестве M , то существует обратная функция $y = f^{-1}(x)$, определённая на множестве $f(M)$ и являющаяся возрастающей (убывающей) на этом множестве.

Докажем теорему для случая возрастания функции $y = f(x)$.

Существование обратной функции почти мгновенно следует из того, что функция $y = f(x)$ возрастающая. Действительно, пусть $f(u) = f(v)$ при некоторых u и v из множества M . Если $u < v$, то $f(u) < f(v)$, что противоречит условию. Если $u > v$, то $f(u) > f(v)$, что тоже противоречит условию. Остаётся признать, что $u = v$. Мы установили, что функция $y = f(x)$ взаимно однозначная на множестве M , а значит, существует обратная функция $y = f^{-1}(x)$, определённая на множестве $P = f(M)$.

Докажем теперь, что функция $y = f^{-1}(x)$ возрастающая на множестве P . Возьмём два числа t и z из множества P . Пусть $t < z$. Докажем, что $f^{-1}(t) < f^{-1}(z)$. Обозначим $p = f^{-1}(t)$, $q = f^{-1}(z)$. Тогда $t = f(p)$, $z = f(q)$. Если бы $p = q$, то было бы $t = z$, что противоречит предположению. Если бы $p > q$, то из возрастания функции $y = f(x)$ следовало бы, что $f(p) > f(q)$, т.е. $t > z$, что противоречит предположению. Осталось признать, что $p < q$. Но поскольку

$p = f^{-1}(t)$, $q = f^{-1}(z)$, то $f^{-1}(t) < f^{-1}(z)$, и возрастание функции $y = f^{-1}(x)$ доказано.

Для примера рассмотрим функцию $f(x) = x^2$ на её естественной области определения R . Поскольку для неё не выполняется* условие $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$, то она не имеет обратной. Но если рассматривать функцию $f(x) = x^2$ на интервале $[0; \infty)$, то она является возрастающей на этом интервале, а значит, по доказанной теореме имеет на нём обратную функцию $f^{-1}(x)$, тоже являющуюся возрастающей. Вы хорошо знаете, что в этом случае $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Заметим также, что если рассматривать функцию $f(x) = x^2$ на интервале $(-\infty; 0]$, то она является на этом интервале убывающей, а значит, имеет на нём убывающую обратную функцию $f^{-1}(x)$. Она может быть задана с помощью формулы $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

Рассмотрим теперь функцию $y = \sin x$. На своей естественной области определения – множестве всех действительных чисел, она не является обратимой, т.к. принимает все свои значения не один раз (а бесконечное количество раз). Но если рассмотреть функцию $y = \sin x$ на каком-нибудь интервале, где она является возрастающей или убывающей, то она будет иметь на этом интервале обратную функцию. Традиционно принято выбирать такой интервал наиболее удобным образом, скажем, поближе к нулю. Из графика синуса видно, что таким наиболее удобным интервалом является интервал $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (на рис. 1.48 график синуса на этом интервале выделен синим цветом).

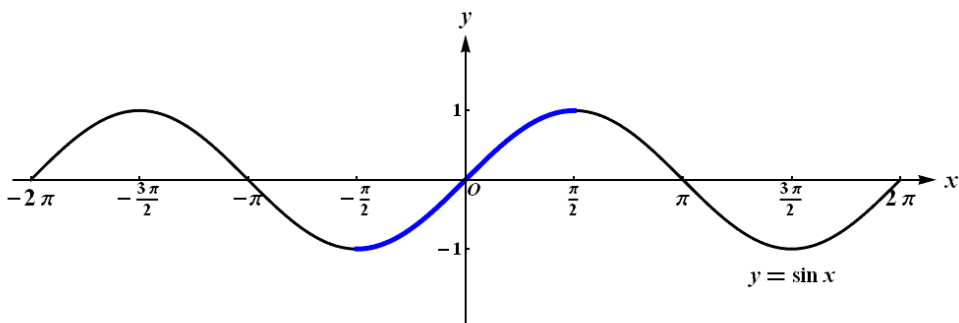


Рис. 1.48

* Скажем, потому что $f(-1) = f(1)$.

Функция, обратная функции $y = \sin x$, рассматриваемой на интервале $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, называется *арксинусом* и обозначается $y = \arcsin x$.

Можно сказать то же самое более подробно:

Арксинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, что $\sin t = a$.

Многим больше нравится другое определение арксинуса:

Арксинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такой угол $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, что $\sin \alpha = a$.

Понятно, что эти определения равносильны, ведь синусом действительного числа x называется синус угла с радианной мерой x . Вопрос здесь исключительно в удобстве (или в привычке).

Наконец, запишем определение арксинуса в виде, удобном при решении задач. Начнём с равносильности:

$$\arcsin a = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = a, \\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ a \in [-1; 1]. \end{cases}$$

Поскольку третье условие в правой части вытекает из первого (из того, что $\sin \alpha = a$, автоматически следует, что $a \in [-1; 1]$), то его можно не писать. В результате получаем следующую важную равносильность, которая называется основной равносильностью для арксинуса:

$$\arcsin a = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = a; \\ -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Сформулируем основные свойства функции $y = \arcsin x$. Все они вытекают из определения арксинуса

- 1) Область определения – отрезок $[-1; 1]$.
- 2) Область значений – отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 3) Функция $y = \arcsin x$ возрастающая на своей области определения.
- 4) Функция $y = \arcsin x$ нечётная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

5) График функции $y = \arcsin x$ симметричен относительно прямой $y = x$ графику функции $y = \sin x$, рассматриваемой на интервале $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 1.49 а). Он изображён на рис. 1.49 б.

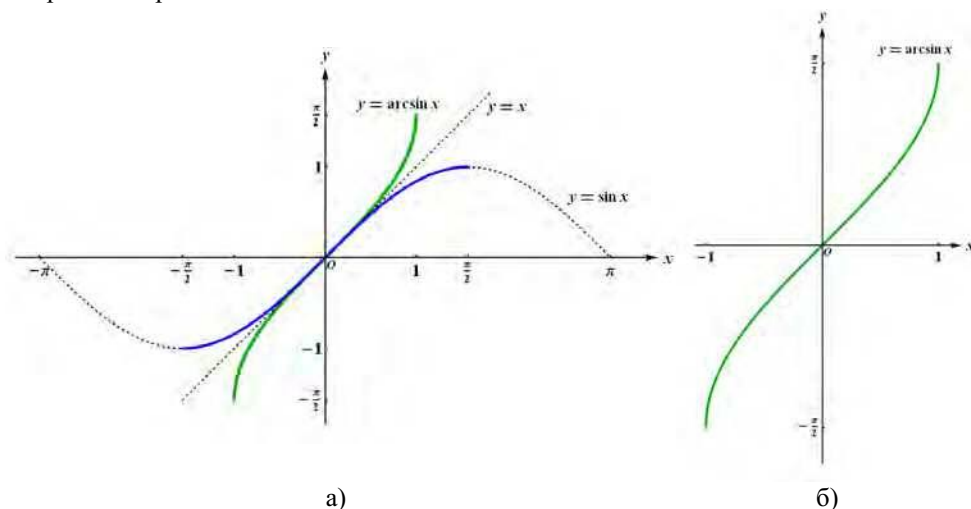


Рис. 1.49

Функция $y = \cos x$, рассматриваемая на своей естественной области определения – множестве всех действительных чисел, не является обратимой, т.к. принимает каждое своё значение бесконечное количество раз. Но если рассмотреть функцию $y = \cos x$ на каком-нибудь интервале, где она является возрастающей или убывающей, то она будет иметь на этом интервале обратную функцию. Наиболее удобным для этого принято считать интервал $[0; \pi]$, на котором функция $y = \cos x$ убывает (на рис. 1.50 график косинуса на этом интервале выделен синим цветом).

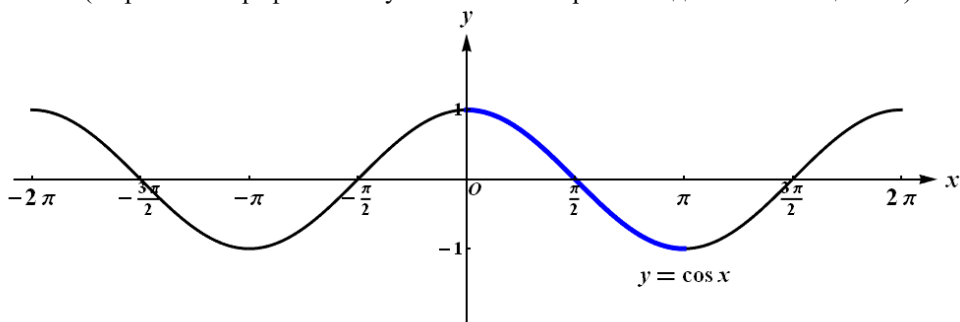


Рис. 1.50

Функция, обратная функции $y = \cos x$, рассматриваемой на интервале $[0; \pi]$, называется *арккосинусом* и обозначается $y = \arccos x$.

Можно записать определение арккосинуса в виде:

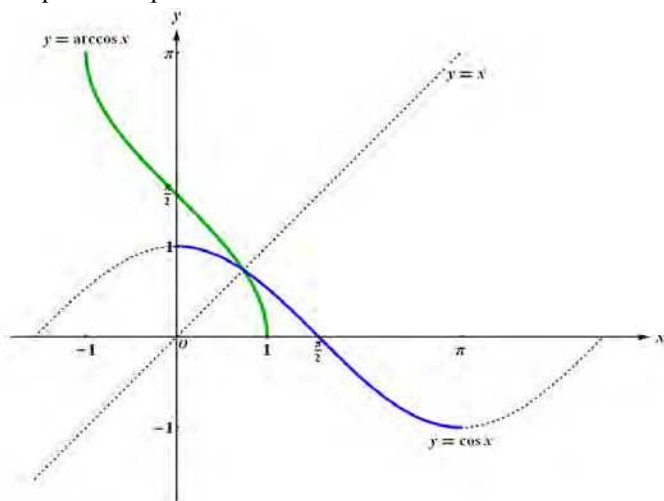
Арккосинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такой угол $\alpha \in [0; \pi]$, что $\cos \alpha = a$.

Запишем также основную равносильность для арккосинуса:

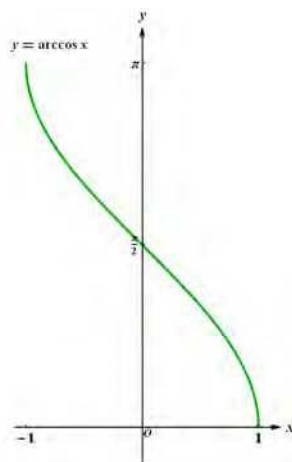
$$\arccos a = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = a; \\ 0 \leq \alpha \leq \pi. \end{cases}$$

Сформулируем основные свойства функции $y = \arccos x$. Все они сразу вытекают из определения арккосинуса

- 1) Область определения – отрезок $[-1; 1]$.
- 2) Область значений – отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 3) Функция $y = \arccos x$ убывающая на своей области определения.
- 4) График функции $y = \arccos x$ симметричен относительно прямой $y = x$ графику функции $y = \cos x$, рассматриваемой на интервале $[0; \pi]$ (рис. 1.51 а). Он изображён на рис. 1.51 б.



а)



б)

Рис. 1.51

Обратите внимание, что функция $y = \arccos x$ не является чётной и не является нечётной.

Функция $y = \operatorname{tg} x$, рассматриваемая на своей естественной области определения – множестве всех действительных чисел, таких что $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, не является обратимой, т.к. принимает каждое своё значение бесконечное количество раз. Но если рассмотреть функцию $y = \operatorname{tg} x$ на каком-нибудь интервале, где она является возрастающей (интервала, на котором она является убывающей, не существует), то она будет иметь на этом интервале обратную функцию. Наиболее удобным для этого принято считать интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, на котором функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает (на рис. 1.52 график тангенса на этом интервале выделен синим цветом).

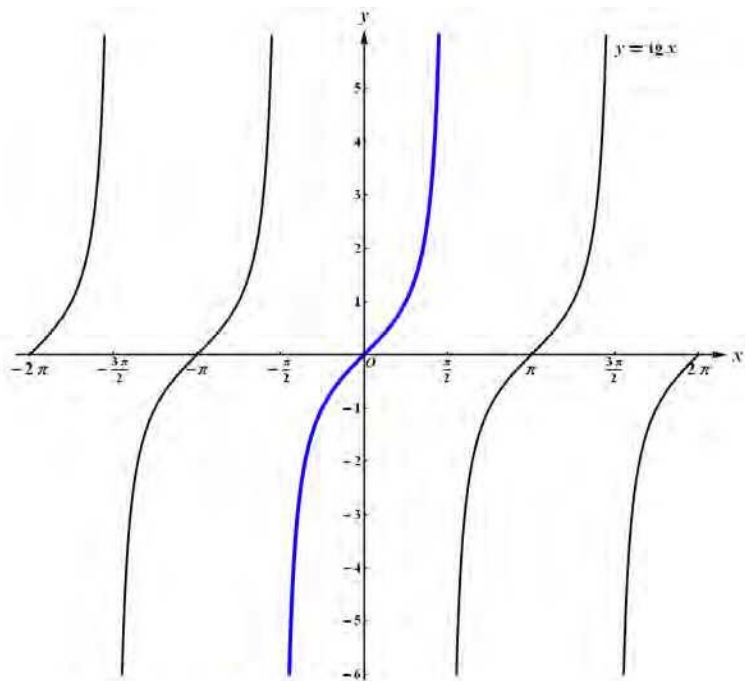


Рис.1. 52

Функция, обратная функции $y = \operatorname{tg} x$, рассматриваемой на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, называется *арктангенсом* и обозначается $y = \operatorname{arctg} x$. Поскольку при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает все действительные значения, то областью определения функции $y = \operatorname{arctg} x$ (в отличие от арксинуса и арккосинуса) является множество всех действительных чисел. Можно записать определение арктангенса в виде:

Арктангенсом числа $a \in R$ называется такой угол $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, что $\operatorname{tg} \alpha = a$.

Запишем также основную равносильность для арктангенса:

$$\operatorname{arctg} a = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = a; \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Сформулируем основные свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$. Все они вытекают из определения арктангенса

- 1) Область определения – множество всех действительных чисел R .
- 2) Область значений – интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

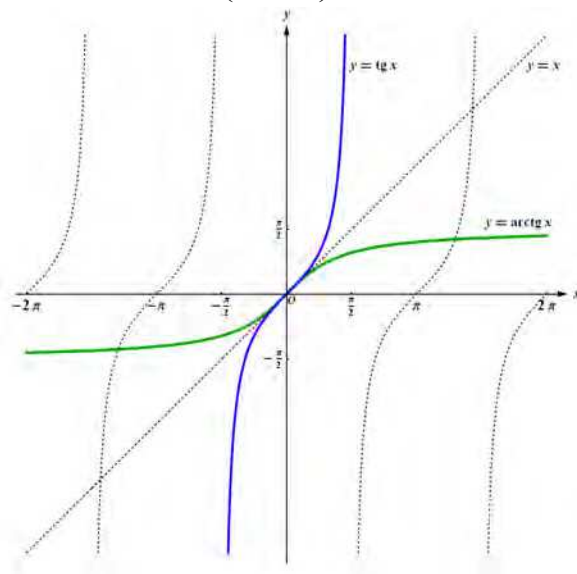


Рис.1. 53

- 3) Функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастающая на своей области определения.
- 4) Функция $y = \operatorname{arctg} x$ нечётная: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.
- 5) График функции $y = \operatorname{arctg} x$ симметричен относительно прямой $y = x$ графику функции $y = \operatorname{tg} x$, рассматриваемой на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 1.53).

Он изображён на рис. 1.54.

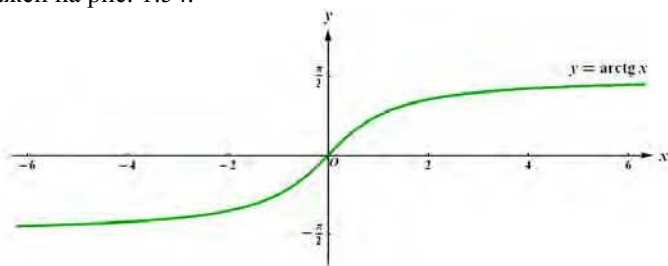


Рис. 1.54

Функция $y = \operatorname{ctg} x$, рассматриваемая на своей естественной области определения – множестве всех действительных чисел, таких что $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, не является обратимой, т.к. принимает каждое своё значение бесконечное количество раз. Но если рассмотреть функцию $y = \operatorname{ctg} x$ на каком-нибудь интервале, где она является убывающей (интервала, на котором она является возрастающей, не существует), то она будет иметь на этом интервале обратную функцию. Наиболее удобным для этого принято считать интервал $(0; \pi)$, на котором функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает (на рис. 1.55 график котангенса на этом интервале выделен синим цветом).

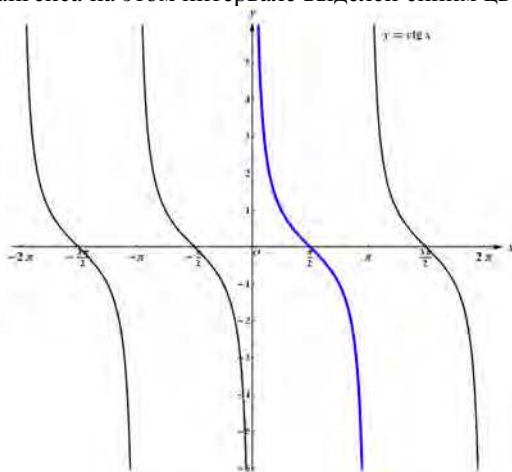


Рис. 1.55

Функция, обратная функции $y = \operatorname{ctg} x$, рассматриваемой на интервале $(0; \pi)$, называется *арккотангенсом* и обозначается $y = \operatorname{arccotg} x$. Поскольку при $x \in (0; \pi)$ функция $y = \operatorname{ctg} x$ принимает все действительные значения, то областью определения функции $y = \operatorname{arccotg} x$ является множество всех действительных чисел.

Можно записать определение арккотангенса в виде:

Арккотангенсом числа $a \in R$ называется такой угол $\alpha \in (0; \pi)$, что $\operatorname{ctg} \alpha = a$.

Запишем также основную равносильность для арккотангенса:

$$\operatorname{arccotg} a = \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{ctg} \alpha = a; \\ 0 < \alpha < \pi. \end{cases}$$

Сформулируем основные свойства функции $y = \operatorname{arccotg} x$. Все они вытекают из определения арккотангенса

- 1) Область определения – множество всех действительных чисел R .
- 2) Область значений – интервал $(0; \pi)$.
- 3) Функция $y = \operatorname{arccotg} x$ убывающая на своей области определения.
- 4) График функции $y = \operatorname{arccotg} x$ симметричен относительно прямой $y = x$ графику функции $y = \operatorname{ctg} x$, рассматриваемой на интервале $(0; \pi)$ (рис. 1.56). Он изображён на рис. 1.57.

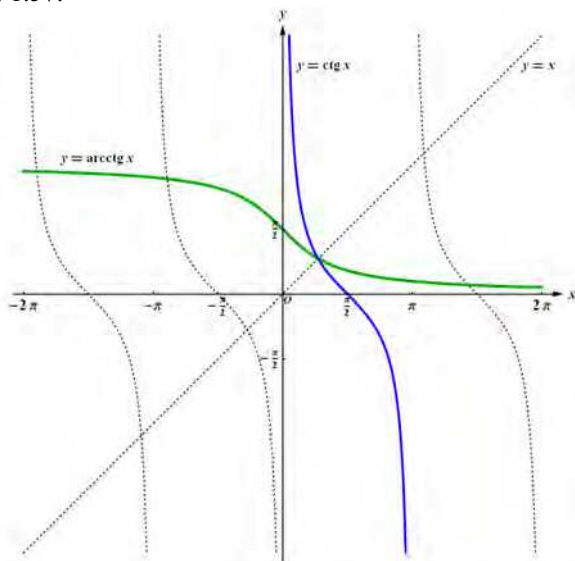


Рис. 1.56

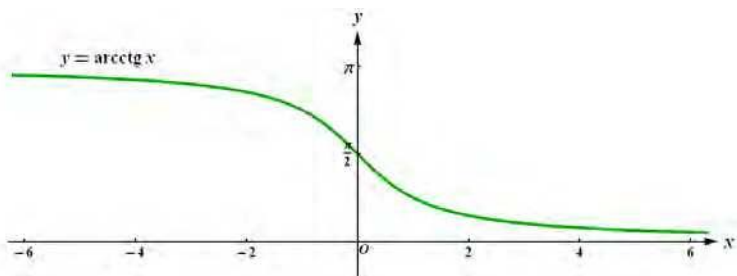


Рис. 1.57

Обратите внимание, что функция $y = \operatorname{arctg} x$, так же, как и функция $y = \arccos x$, не является чётной и не является нечётной.

Общее название арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса – *обратные тригонометрические функции*. В устной речи принято для краткости говорить «аркфункции» или ещё короче «арки».

При работе с обратными тригонометрическими функциями очень важную роль играют следующие свойства:

Значением обратной тригонометрической функции неотрицательного числа является угол из I четверти (от 0 до $\frac{\pi}{2}$ включительно).

Значения обратных тригонометрических функций отрицательных чисел можно находить по формулам:

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$$

$$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$$

Формулы, стоящие в левом столбике, позволяют утверждать, что арксинус и арктангенс являются нечётными функциями. Что касается арккосинуса и арккотангенса, то они не являются ни чётными, ни нечётными функциями.

Первое из сформулированных свойств вытекает из того, что все тригонометрические функции в первой четверти принимают неотрицательные значения.

Нечётность арксинуса и арктангенса мы уже установили ранее. Формула $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ вытекает из того факта, что график арккосинуса симметричен относительно точки $A\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 1.58).

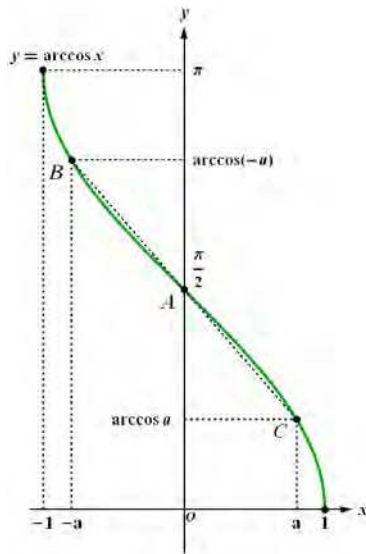


Рис. 1.58

Отсюда получаем, что ордината точки A равна среднему арифметическому ординат точек B и C , т.е. $\frac{\pi}{2} = \frac{\arccos(-a) + \arccos a}{2}$, откуда и следует, что $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Аналогичным образом может быть доказана и формула $\operatorname{arccotg}(-a) = \pi - \operatorname{arccotg} a$.

При нахождении значений обратных тригонометрических функций неотрицательных чисел, содержащихся в таблице параграфа 1.2, они находятся непосредственно по этой же таблице. Например, при нахождении $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ можно

рассуждать так. Число $\frac{\sqrt{2}}{2}$ положительное, значит, его арксинус – такой угол из первой четверти, синус которого равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$. По таблице я вижу (или я знаю

наизусть), что это угол $\frac{\pi}{4}$. Таким образом, $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. Значения обратных тригонометрических функций для чисел, не содержащихся в таблице, можно вычислять с помощью калькулятора. Иногда это удаётся сделать без калькулятора, проведя удачное преобразование.

Рассмотрим несколько примеров на преобразование выражений, содержащих обратные тригонометрические функции (арки). Общий принцип, который полезно применять в таких задачах, следующий.

Заменим каждый арк новой буквой (сделаем замены переменных). При этом важно выписывать ограничения на углы – либо используя основные равносильности, либо используя данные задачи. В некоторых случаях ограничения вообще не понадобятся, в некоторых они будут играть важную роль, а бывают и такие задачи, где ограничения окажутся слишком «широкими», и их придётся уточнять, делать более «узкими», «сужать».

Пример 2. Вычислите $\cos\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)$.

Решение. Пусть $\arcsin\frac{2}{3} = \alpha$. Это значит, что $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (ведь арксинус положительного числа – угол из первой четверти). Теперь нам нужно найти $\cos\alpha$. Это уже совсем знакомая задача. $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$. Поскольку $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, понятно, что $\cos\alpha > 0$, и значит, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Итак, мы установили, что $\cos\left(\arcsin\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Заметим, что ограничения на угол α были использованы.

Пример 3. Вычислите $\sin(2\arctg 3)$.

Решение. Пусть $\arctg 3 = \alpha$. Это значит, что $\tg\alpha = 3$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, и нам нужно найти $\sin 2\alpha$. Но $\sin 2\alpha = \frac{2\tg\alpha}{1+\tg^2\alpha} = \frac{2 \cdot 3}{1+3^2} = \frac{6}{10} = 0,6$. Итак, установлено, что $\sin(2\arctg 3) = 0,6$. При решении этой задачи ограничения на угол α не понадобились.

Пример 4. Вычислите $\cos(\arctg x)$.

Решение. Пусть $\arctg x = \alpha$. Это значит, что $\tg\alpha = x$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, и нам нужно найти $\cos\alpha$. Но $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tg^2\alpha = 1 + x^2$, значит $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+x^2}$, поскольку $\cos\alpha > 0$ при $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, получаем, что $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, и тем самым и выведена формула $\cos(\arctg x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Пример 5. Вычислите $\sin(\operatorname{arctg} x)$.

Решение. Как и в предыдущем примере, пусть $\operatorname{arctg} x = \alpha$. Это значит, что $\operatorname{tg} \alpha = x$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, и нам нужно найти $\sin \alpha$.

$$\text{Но } \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + 1}{x^2}, \text{ значит, } \sin^2 \alpha = \frac{x^2}{1 + x^2}.$$

Полученное соотношение позволяет записать только, что $\sin \alpha = \pm \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$, и нужно ещё решить вопрос выбора знака. Здесь это делается следующим образом. Поскольку $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то угол α находится в I или IV четверти. В этих четвертях знаки синуса и тангенса одинаковы. А т.к. $\sqrt{1 + x^2} > 0$, и знак $\sin \alpha$ такой же, как знак x , то перед дробью следует взять знак «+». Отсюда следует, что $\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$, и тем самым нами выведена формула $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Пример 6. Постройте график функции $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$.

Решение. Областью определения функции является множество всех действительных чисел, причём для любого действительного значения x $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$. Таким образом:

$$y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x; \\ x \in R. \end{cases}$$

График функции $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$ изображён на рис. 1.59 а.

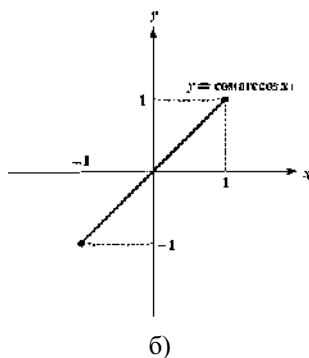
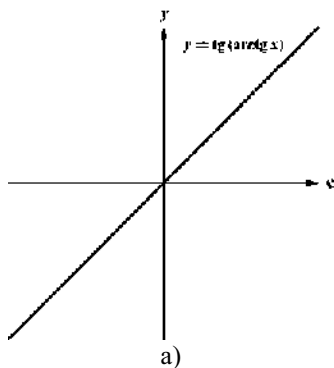


Рис. 1.59

Пример 7. Постройте график функции $y = \cos(\arccos x)$.

Решение. Областью определения функции является интервал $[-1; 1]$, причём для любого значения x из этого интервала $\cos(\arccos x) = x$. Таким образом:

$$y = \cos(\arccos x) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x; \\ x \in [-1; 1]. \end{cases}$$

График функции $y = \cos(\arccos x)$ изображён на рис. 1.59 б.

Пример 8. Постройте график функции $y = \arctg(\operatorname{tg} x)$.

Решение. Областью определения функции является множество всех действительных чисел x , таких что $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

На основании основной равносильности для арктангенса имеем:

$$y = \arctg(\operatorname{tg} x) \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y; \\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Отсюда заключаем, что при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ выполняется равенство $y = x$, или по-другому, при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ $\arctg(\operatorname{tg} x) = x$. Это значит, что при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ график исследуемой функции $y = \arctg(\operatorname{tg} x)$ совпадает с графиком функции $y = x$ (рис. 1.60).

Но поскольку функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с основным периодом π , рассматриваемая функция $y = \arctg(\operatorname{tg} x)$ тоже периодическая с основным периодом π .

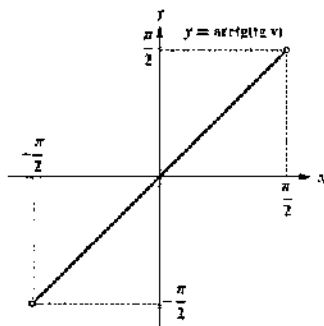


Рис. 1.60

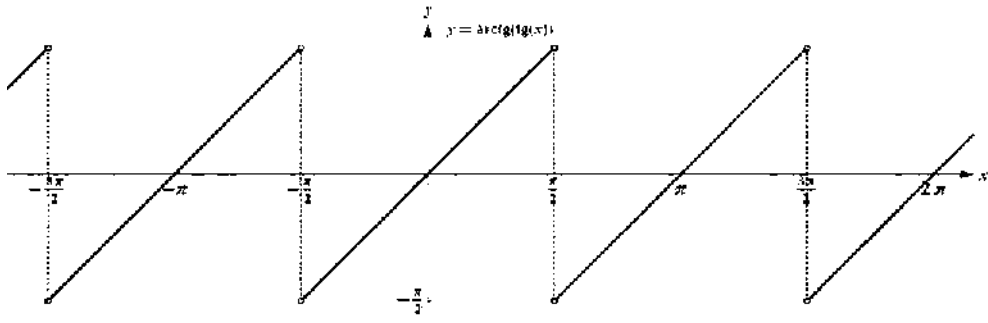


Рис. 1.61

А поскольку график функции $y = \arctg(\operatorname{tg} x)$ мы знаем на одном периоде (рис. 1.60), то легко получаем график на всей области определения. Он изображён на рис. 1.61.

Пример 8. Постройте график функции $y = \arccos(\cos x)$.

Решение. Областью определения функции является множество всех действительных чисел.

Начало решения такое же, как в предыдущем примере. На основании основной равносильности для арккосинуса имеем:

$$y = \arccos(\cos x) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \cos y; \\ y \in [0; \pi]. \end{cases}$$

Отсюда заключаем, что при $x \in [0; \pi]$ выполняется равенство $y = x$, или по-другому, при $x \in [0; \pi]$ $\arccos(\cos x) = x$. Это значит, что при $x \in [0; \pi]$ график исследуемой функции $y = \arccos(\cos x)$ совпадает с графиком функции $y = x$ (рис. 1.62 а).

Функция $y = \cos x$ периодическая с основным периодом 2π , значит, рассматриваемая функция $y = \arccos(\cos x)$ тоже периодическая с основным периодом 2π .

Но в отличие от предыдущего примера, мы знаем график функции $y = \arccos(\cos x)$ не на всём периоде, а лишь на части периода (рис. 1.62 а), и о продолжении графика по периодичности говорить ещё рано.

Заметим, что функция $y = \cos x$ чётная, значит, функция $y = \arccos(\cos x)$ тоже чётная. Но график чётной функции симметричен относительно оси ординат. Значит, зная график нашей функции $y = \arccos(\cos x)$ при $x \in [0; \pi]$, мы можем построить его и при $x \in [-\pi; 0]$ (рис. 1.62 б). Из этого фрагмента графика видно, кстати, что при $x \in [-\pi; 0]$ справедлива формула $\arccos(\cos x) = -x$.

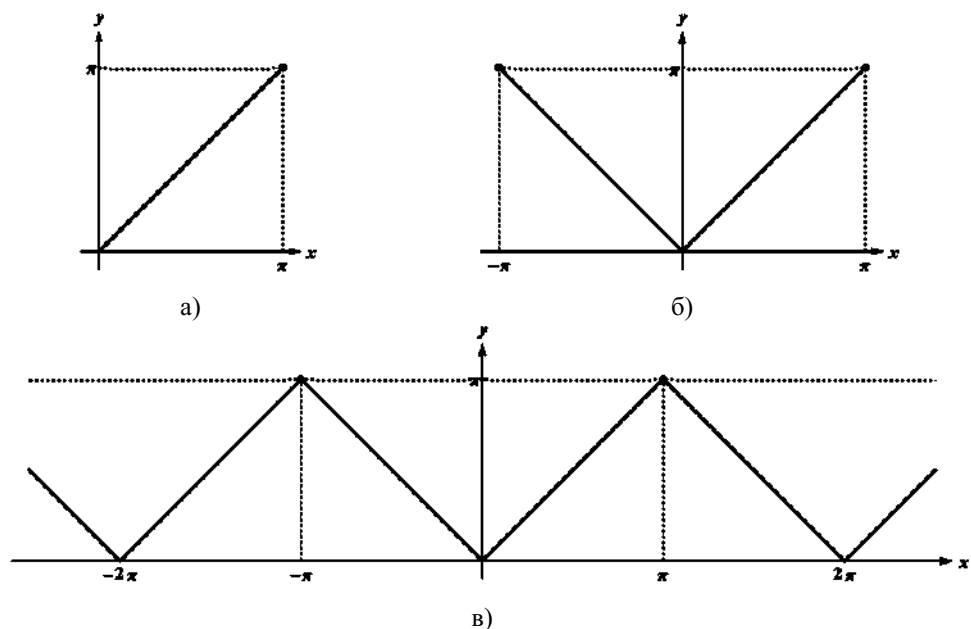


Рис. 1.62

Теперь, зная график на интервале длиной в период (рис. 1.62 б), можно начертить график на всей области определения. Он изображён на рис. 1.62 в.

Очень полезно уметь выписывать формулы, которыми задаётся функция $y = \arccos(\cos x)$ на разных интервалах. Убедитесь самостоятельно, что

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} x - 2\pi n, & x \in [2\pi n, \pi + 2\pi n], \\ -x + 2\pi n, & x \in [-\pi + 2\pi n, 2\pi n], \end{cases} \quad \text{где } n \in \mathbb{Z}.$$

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

- Какая функция называется обратимой?
- Какие условия обратимости функции вы знаете?

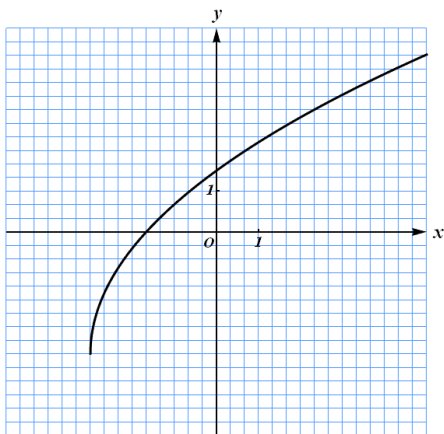
2 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

- Какая функция называется обратной для данной обратимой функции?
- Как связаны между собой области определения и области значений взаимно обратных функций?

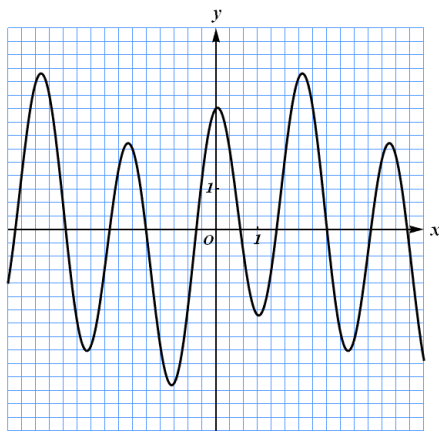
3 Что можно сказать о функции, если известно, что она имеет обратную функцию, являющуюся: а) возрастающей; б) убывающей?

4 На рис. 1.63 приведены графики нескольких функций. Какие из них являются обратимыми?

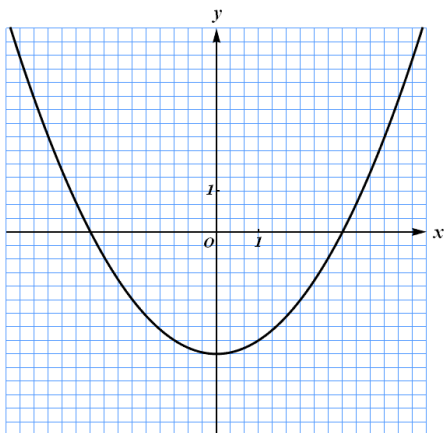
а)



б)



в)



г)

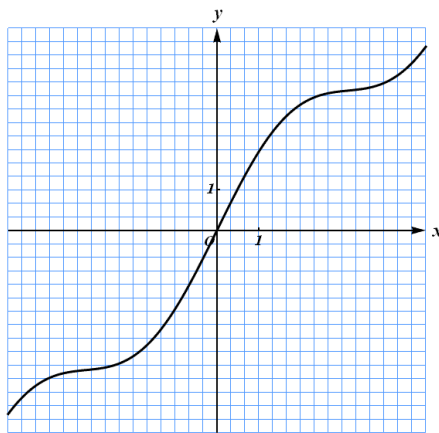


Рис. 1.63

5 Может ли функция быть обратной самой себе? Если нет, объясните, почему. Если да, приведите несколько примеров таких функций.

6 Установите, какие из данных функций, заданных на естественной области определения, обратимы. Для обратимых функций найдите обратные функции.

а) $y = 3x - 6$;

в) $y = x^2 - 1$;

б) $y = \frac{1}{x-2}$;

г) $y = x + \sqrt{x}$.

7 Какие из записанных выражений имеют смысл?

- а) $\operatorname{arctg} \sqrt{2}$; в) $\operatorname{arccos}(-100)$; д) $\arccos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;
б) $\arccos \sqrt{2}$; г) $\arcsin(\sqrt{3}-1)$; е) $\arcsin(4-\sqrt{5})$.

8 Вычислите.

- а) $\arcsin \frac{1}{2}$; в) $\arcsin(-1)$; д) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$;
б) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; е) $\arcsin 0$.

9 Вычислите.

- а) $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; в) $\arccos \frac{1}{2}$; д) $\arccos 0$;
б) $\arccos(-1)$; г) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; е) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$.

10 Вычислите.

- а) $\operatorname{arctg} 0$; в) $\operatorname{arctg}(-1)$; д) $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$;
б) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; г) $\operatorname{arctg} 1$; е) $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$.

11 Вычислите.

- а) $\operatorname{arccos} \sqrt{3}$; в) $\operatorname{arccos} \frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $\operatorname{arccos}(-\sqrt{3})$;
б) $\operatorname{arccos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; г) $\operatorname{arccos}(-1)$; е) $\operatorname{arccos} 1$.

12 Упростите.

- а) $2 \arcsin\left(1+7 \frac{2-\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-4)(4+\sqrt{2})}\right)+3 \operatorname{arctg}\left(1+11 \frac{3-\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-6)(6+\sqrt{3})}\right)$;
б) $\arccos\left(\frac{3-\sqrt{17}}{4}-\frac{2}{5+\sqrt{17}}\right)-\operatorname{arccos}\left(\frac{2}{1-\sqrt{5}}+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$;
в) $4 \arcsin \frac{4\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}-8}+2 \arccos \frac{1+2\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$;
г) $5 \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{21}}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{21}}{6}\right)-3 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\right)$.

13 Упростите.

$$\begin{aligned} \text{а) } \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + \sqrt{\frac{7}{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - \sqrt{\frac{7}{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}} - \frac{1 - \sqrt{\frac{7}{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \sqrt{\frac{7}{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}} \right); & \quad \text{в) } \operatorname{arccctg} \left(\frac{1 - 2(2 + \sqrt{3})}{3 + \sqrt{3}} - \frac{1}{1 + \sqrt{3}} \right); \\ \text{б) } \arccos \left(\frac{10 + 5\sqrt{5}}{\frac{5}{2}(3 + \sqrt{5})} - \frac{\frac{5}{2}(3 + \sqrt{5})}{10 + 5\sqrt{5}} \right); & \quad \text{г) } \arcsin \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1} - \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}} \right). \end{aligned}$$

14 Вычислите.

$$\begin{aligned} \text{а) } \cos(\operatorname{arccctg} 2); & \quad \text{в) } \sin(\operatorname{arctg} 7); & \quad \text{д) } \cos \left(\arcsin \frac{1}{4} \right); \\ \text{б) } \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 5); & \quad \text{г) } \sin(\operatorname{arctg} 11); & \quad \text{е) } \sin \left(\arccos \frac{1}{5} \right). \end{aligned}$$

15 Вычислите.

$$\begin{aligned} \text{а) } \cos(\operatorname{arccctg}(-4)); & \quad \text{в) } \operatorname{tg}(\arccos(-0,3)); & \quad \text{д) } \sin \left(\arccos \left(-\frac{4}{7} \right) \right); \\ \text{б) } \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-15)); & \quad \text{г) } \operatorname{ctg}(\arcsin(-0,9)); & \quad \text{е) } \operatorname{ctg} \left(\arccos \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right). \end{aligned}$$

16 Вычислите.

$$\begin{aligned} \text{а) } \cos(2\arcsin 0,2); & \quad \text{в) } \operatorname{tg}(2\operatorname{arccctg} 20); & \quad \text{д) } \sin(2\operatorname{arccctg} \sqrt{26}); \\ \text{б) } \operatorname{tg}(2\arccos 0,6); & \quad \text{г) } \operatorname{tg} \left(2\arcsin \frac{7}{9} \right); & \quad \text{е) } \operatorname{ctg} \left(2\arccos \frac{10}{11} \right). \end{aligned}$$

17 Вычислите.

$$\begin{aligned} \text{а) } \cos(2\arccos(-0,8)); & \quad \text{в) } \operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}(-3)); & \quad \text{д) } \sin(2\arcsin(-0,1)); \\ \text{б) } \sin \left(2\arccos \left(-\frac{2}{3} \right) \right); & \quad \text{г) } \operatorname{ctg} \left(2\arccos \left(-\frac{3}{5} \right) \right); & \quad \text{е) } \operatorname{ctg} \left(2\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{3} \right) \right). \end{aligned}$$

18 Вычислите.

$$\begin{aligned} \text{а) } \cos \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{3}{4} \right); & \quad \text{в) } \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arccos 0,4 \right); & \quad \text{д) } \cos \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{3}}{5} \right); \\ \text{б) } \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arccctg} 7 \right); & \quad \text{г) } \sin \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{5}{6} \right); & \quad \text{е) } \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 4 \right). \end{aligned}$$

19 Вычислите.

- а) $\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-3)\right)$; в) $\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}(-0,1)\right)$; д) $\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(-2)\right)$;
б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{4}\right)\right)$; г) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos(-0,2)\right)$; е) $\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{5}{2}\right)\right)$.

П

20 Вычислите.

- а) $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\arcsin\frac{1}{3}\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{5}}{6}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{10}\right)\right)$;
б) $\sin(2\operatorname{arctg}(-2)-\operatorname{arcctg}4)$; г) $\operatorname{ctg}\left(2\operatorname{arctg}(-5)+2\arccos\frac{4}{7}\right)$.

21 Докажите тождества.

- а) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$; в) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$;
б) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; г) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$.

22 Приведите выражение к виду, в котором будут отсутствовать тригонометрические или обратные тригонометрические функции.

- а) $\operatorname{tg}(\arccos x + \operatorname{arctg} x)$; в) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\operatorname{arcctg} x\right)$;
б) $\sin(2\operatorname{arctg} x - \arcsin x)$; г) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x + 2\arccos x)$.

М

23 Докажите тождества.

- а) $\cos(4\arcsin x) = 1 - 8x^2 + 8x^4$; в) $\operatorname{tg}(4\arcsin x) = \frac{4x(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}}{1-8x^2+8x^4}$;
б) $\frac{1}{2}\sin(6\operatorname{arctg} x) = \frac{3x-10x^3+3x^5}{(1+x^2)^3}$; г) $\operatorname{ctg}(3\operatorname{arcctg} x) = \frac{x^3-3x}{3x^2-1}$.

24 Вычислите.

- а) $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 4 - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} \frac{15}{8}$; в) $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 5 + \operatorname{arctg} 8$;
б) $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} 1$; г) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} \frac{24}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} 2$.

1.12. Метод вспомогательного угла

Рассмотрим выражение $A \sin x + B \cos x$, где A и B – произвольные действительные числа, отличные от нуля. Покажем, что это выражение может быть преобразовано к одному лишь синусу или одному лишь косинусу (по нашему желанию) некоторого нового угла, называемого *вспомогательным*. Точнее, покажем, что существуют такое действительное число C и такой угол α , что $A \sin x + B \cos x = C \sin(x + \alpha)$, а также существуют такое действительное число D и такой угол β , что $A \sin x + B \cos x = D \cos(x + \beta)$, причём не просто покажем, что они существуют, а научимся их находить. Заметим также, что метод вспомогательного угла часто называется ещё *методом вспомогательного аргумента*.

Основной момент преобразования основан на следующей важной и самой по себе теореме:

Если действительные числа u и v таковы, что $u^2 + v^2 = 1$, то найдётся такой угол γ , что
$$\begin{cases} \cos \gamma = u; \\ \sin \gamma = v. \end{cases}$$

Действительно, поскольку тригонометрическая окружность в системе координат xOy задаётся уравнением $x^2 + y^2 = 1$, а для чисел u и v выполняется соотношение $u^2 + v^2 = 1$, то точка с координатами $(u; v)$ лежит на тригонометрической окружности, а значит, ей соответствует некоторый угол γ : $P_\gamma(u; v)$. Но поскольку также $P_\gamma(\cos \gamma; \sin \gamma)$, получаем требуемое
$$\begin{cases} \cos \gamma = u; \\ \sin \gamma = v. \end{cases}$$

Первый шаг преобразования к требуемому виду выражения $A \sin x + B \cos x$, где A и B – произвольные ненулевые действительные числа, заключается в том, что мы умножим и разделим наше выражение на $\sqrt{A^2 + B^2} \neq 0$. Получим:

$$A \sin x + B \cos x = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x \right).$$

Поскольку $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 = \frac{A^2}{A^2 + B^2} + \frac{B^2}{A^2 + B^2} = 1$, на основании теоремы заключаем, что найдётся такой угол α , что
$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \\ \sin \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{cases}$$

Вернёмся к нашему преобразованию:

$$\begin{aligned} A \sin x + B \cos x &= \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} (\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x + \alpha). \end{aligned}$$

Обозначая $\sqrt{A^2 + B^2} = C$, получим заявленное $A \sin x + B \cos x = C \sin(x + \alpha)$.

Из выведенной формулы $A \sin x + B \cos x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(x + \alpha)$ мгновенно получаются два очень важных следствия:

Для всех действительных чисел x справедливо неравенство:

$$-\sqrt{A^2 + B^2} \leq A \sin x + B \cos x \leq \sqrt{A^2 + B^2}.$$

Множеством значений функции $y = A \sin x + B \cos x$

является отрезок $\left[-\sqrt{A^2 + B^2}; \sqrt{A^2 + B^2} \right]$.

Мы показали, как выражение $A \sin x + B \cos x$ преобразуется к одному лишь синусу вспомогательного угла.

Если мы желаем преобразовать его к косинусу, то сделав первый шаг абсолютно такой же и заметив, что $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 = 1$, на основании той же

теоремы мы можем заключить, что найдётся такой угол β , что
$$\begin{cases} \cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \\ \sin \beta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{cases}$$

Тогда дальнейшее преобразование пойдёт так:

$$\begin{aligned} A \sin x + B \cos x &= \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} (\sin x \sin \beta + \cos x \cos \beta) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(x - \beta) = C \cos(x - \beta), \end{aligned}$$

где, как и прежде, обозначено $\sqrt{A^2 + B^2} = C$.

Некоторым недостатком описанных преобразований является невозможность, вообще говоря, просто выразить углы α или β через A и B . При решении задач с числовыми данными этого недостатка можно избежать, если пользоваться следующим следствием доказанной выше теоремы:

Если положительные действительные числа u и v таковы, что $u^2 + v^2 = 1$, то найдётся такой угол φ , что $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ и $\begin{cases} \cos \varphi = u; \\ \sin \varphi = v. \end{cases}$

Действительно, в этом случае точка с координатами $(u; v)$ лежит на тригонометрической окружности в I четверти, а значит соответствующий ей угол φ такой, что $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим конкретные примеры преобразований.

Пример 1. Преобразуйте к синусу: $3 \sin x - 2 \cos x$.

Решение. Здесь $A = 3$; $B = -2$; $C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{13}$. Имеем:

$$3 \sin x - 2 \cos x = \sqrt{13} \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \sin x - \frac{2}{\sqrt{13}} \cos x \right)$$

Поскольку положительные числа $\frac{3}{\sqrt{13}}$ и $\frac{2}{\sqrt{13}}$ таковы, что $\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 = 1$, существует такой угол $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, что $\cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}$; $\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{13}}$. И вот здесь как раз мы можем точно указать, чему равен этот угол. Раз у него положительные синус и косинус, то можно считать, что $\varphi = \arccos \frac{3}{\sqrt{13}}$, а можно считать, что $\varphi = \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}}$. Можно также при желании считать, что $\varphi = \arctg \frac{2}{3}$ или $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$, т.к. $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{3}$ и $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{3}{2}$. Закончим преобразование:

$$\begin{aligned} 3 \sin x - 2 \cos x &= \sqrt{13} \left(\frac{3}{\sqrt{13}} \sin x - \frac{2}{\sqrt{13}} \cos x \right) = \sqrt{13} (\sin x \cos \varphi - \cos x \sin \varphi) = \\ &= \sqrt{13} \sin(x - \varphi) = \sqrt{13} \sin \left(x - \arcsin \frac{2}{\sqrt{13}} \right). \end{aligned}$$

На последнем шаге при желании можно было также записать $3 \sin x - 2 \cos x = \sqrt{13} \sin(x - \operatorname{arctg} 1,5)$, или воспользоваться ещё двумя возможными вариантами записи. Как видите, здесь в результате преобразований получается не «некоторый угол φ », а вполне конкретный, явно указанный угол.

В некоторых ситуациях, когда возникают табличные синусы и косинусы, преобразование выполняется ещё проще.

Пример 2. Преобразуйте к косинусу: $\sin x + \sqrt{3} \cos x$.

Решение. Здесь $A = 1$; $B = \sqrt{3}$; $C = \sqrt{A^2 + B^2} = 2$. Имеем:

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) = 2 \left(\sin \frac{\pi}{6} \sin x + \cos \frac{\pi}{6} \cos x \right) = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right).$$

Здесь мы сразу увидели, что числа $\frac{1}{2}$ и $\frac{\sqrt{3}}{2}$, возникшие в начале преобразования, можно без всяких комментариев представить как $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$; $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$.

Пример 3*. Упростите выражение:
$$\frac{\sqrt{2} \sin 5\alpha + \sqrt{2} \cos 5\alpha + \sqrt{3} \sin 3\alpha - \cos 3\alpha}{\sin \left(4\alpha - \frac{\pi}{24} \right)}.$$

Решение. Сначала преобразуем числитель, стараясь разложить его на множители. Он содержит две конструкции вида $A \sin x + B \cos x$. Преобразуем каждую из них отдельно:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sin 5\alpha + \sqrt{2} \cos 5\alpha &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5\alpha \right) = \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin 5\alpha + \sin \frac{\pi}{4} \cos 5\alpha \right) = 2 \sin \left(5\alpha + \frac{\pi}{4} \right). \\ \sqrt{3} \sin 3\alpha - \cos 3\alpha &= 2 \left(\frac{1}{2} \sin 3\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3\alpha \right) = \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \sin 3\alpha - \sin \frac{\pi}{3} \cos 3\alpha \right) = 2 \sin \left(3\alpha - \frac{\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Дальнейшее преобразование числителя выполним, вынеся общий множитель 2 за скобки и преобразовывая возникшую сумму синусов в произведение:

$$2 \sin \left(5\alpha + \frac{\pi}{4} \right) + 2 \sin \left(3\alpha - \frac{\pi}{3} \right) = 2 \cdot 2 \sin \left(4\alpha - \frac{\pi}{24} \right) \cos \left(\alpha + \frac{7\pi}{24} \right).$$

Поскольку первый множитель совпадает со знаменателем преобразуемой дроби, получаем окончательно:

$$\frac{\sqrt{2} \sin 5\alpha + \sqrt{2} \cos 5\alpha + \sqrt{3} \sin 3\alpha - \cos 3\alpha}{\sin \left(4\alpha - \frac{\pi}{24} \right)} = 4 \cos \left(\alpha + \frac{7\pi}{24} \right).$$

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

а) К какому виду можно преобразовать выражение $A \sin x + B \cos x$, где A и B – произвольные действительные числа, отличные от нуля?

б) Как выполняется это преобразование?

2 а) Что называется методом вспомогательного угла в тригонометрии?

б) На каких теоремах и формулах основан метод вспомогательного угла?

3 а) Что можно утверждать о действительных числах u и v , если известно, что они удовлетворяют соотношению $u^2 + v^2 = 1$?

б) Что дополнительно можно утверждать о действительных числах u и v , если известно, что они удовлетворяют соотношению $u^2 + v^2 = 1$ и оба являются положительными?

4 Преобразуйте к синусу.

а) $2 \sin x - \cos x$;

в) $2 \sin x + 5 \cos x$;

б) $4 \sin x + 3 \cos x$;

г) $4 \cos x - \sin x$.

5 Преобразуйте к косинусу.

а) $2 \sin x + 3 \cos x$;

в) $6 \sin x - 8 \cos x$;

б) $4 \cos x + 2 \sin x$;

г) $3 \cos x - 5 \sin x$.

6 Постройте график функции.

а) $y = \sqrt{3} \cos x - \sin x$;

в) $y = 2\sqrt{2} \cos x - 2\sqrt{2} \sin x$;

б) $y = 3\sqrt{3} \cos x - 3 \sin x$;

г) $y = \cos x + \sqrt{3} \sin x$.

7 Постройте график функции.

а) $y = \cos x - \sin x - 2$;

в) $y = \frac{3}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{5}{2} \sin x$;

б) $y = 1 - \frac{3}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin x$;

г) $y = 2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos x + \frac{1}{4} \sin x$.

8 Найдите наибольшее и наименьшее значение функции.

а) $y = 2 \sin x + 7 \cos x$;

в) $y = 4 \sin x - 3 \cos x - 2$;

б) $y = 8 \sin x - 3 \cos x$;

г) $y = 12 - 7 \cos x + 4 \sin x$.

9 Найдите множество значений функции.

а) $y = \sin 3x - 5 \cos 3x$;

в) $y = 2 \sin x - \cos x - 2\sqrt{5}$;

б) $y = \sqrt{3} \sin 5x - \sqrt{5} \cos 5x$;

г) $y = \frac{1}{3} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{13}}{2}$.

П

10 Постройте график функции.

- а) $y = 3 \cos x - 4 \sin x$; в) $y = 12 \cos x - 9 \sin x$;
б) $y = 5 \cos x + 12 \sin x$; г) $y = 15 \cos x + 8 \sin x$.

11 Постройте график функции.

- а) $y = 12 \cos x + 4 \sin x + 3$; в) $y = \sqrt{2} \cos x - \sqrt{7} \sin x + 1$;
б) $y = \sqrt{15} \cos x + \sin x - 2$; г) $y = 2 \cos x - 3 \sin x + 3$.

12 Постройте график функции.

- а) $y = 4 \sin 2x + 3 \cos 2x$; в) $y = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} - 1$;
б) $y = 2 \sin 3x + 5 \cos 3x$; г) $y = 3 \sin 3x + 4 \cos 3x - 2$.

13 Упростите выражение.

- а) $\sin x - \cos x - \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$; в) $\sqrt{3} \cos x - \sin x - 3 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$;
б) $\cos x + 7 \sin x - 5\sqrt{2} \sin \left(x + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} \right)$; г) $4 \left(\cos x + \sqrt{3} \sin x \right) - 6 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$.

14 Преобразуйте в произведение.

- а) $\sqrt{5} \sin 3x - 2 \cos 3x - 3 \cos x$; в) $\sqrt{5} \sin 4x + \sqrt{3} \cos 4x - 2\sqrt{2} \cos 2x$;
б) $2 \sin 2x - 3 \cos 2x + \sqrt{13} \cos 3x$; г) $6 \sin 5x + 8 \cos 5x + 10 \cos 10x$.

15 Найдите наибольшее и наименьшее значение функции.

- а) $y = 2 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x$; в) $y = 1 + 2 \cos^2 2x + \cos 2x + 2(\sin x + \cos x)^4$;
б) $y = 4 \cos^2 x + (\sin x + \cos x)^2$; г) $y = (\cos 2x + \sin 2x + 1)^2 - \sin 4x$.

М

16 Десятиклассник Вася считает, что выражение $A \sin x + B \cos x$ можно всегда преобразовывать по общей формуле: $A \sin x + B \cos x = \sqrt{A^2 + B^2} \sin \left(x + \operatorname{arctg} \frac{B}{A} \right)$. Как вы считаете, прав ли Вася? Обоснуйте свой ответ.

17 Упростите.

a) $\frac{3 \cos \alpha - \sin \alpha}{\cos 2\alpha + 8 \sin 2\alpha - 4} \sin \left(\alpha - \operatorname{arctg} \frac{1}{5} \right);$

б) $\frac{\sin \left(3\alpha + \frac{\pi}{6} \right) + \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{6} \right) - 2 \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right)}{(\sin \alpha - \cos \alpha)(\sqrt{3} \cos \alpha - \sin \alpha)};$

в) $\frac{\frac{\sin 2\alpha}{2} \left(\sin \frac{\pi}{8} + \cos \frac{\pi}{8} \right) - \sin \frac{\pi}{8} \sin^2 \alpha - \cos \frac{\pi}{8} \cos^2 \alpha}{\sin \left(\frac{\pi}{8} - \alpha \right) - \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{8} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{8} - \alpha \right) - \cos \left(\frac{\pi}{8} - 3\alpha \right)};$

г) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6} - 4 \sin \left(\frac{\pi}{12} - 2\alpha \right)}{(\sqrt{3} - 1) \sin^2 \alpha + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sin 2\alpha + 1}.$

ГЛАВА II

Тригонометрические уравнения и неравенства

2.1. Тригонометрические уравнения и их корни

В курсе алгебры 7–9 классов мы изучали *алгебраические* уравнения (линейные, квадратные, дробно-рациональные). Мы выяснили, что решение алгебраических уравнений обычно сводится к тождественным преобразованиям, при которых данное уравнение заменяют другим, равносильным ему, более простым уравнением. Затем полученное уравнение заменяют другим, ещё более простым, и так действуют до тех пор, пока не получают уравнение, которое уже умеют решать.

В курсе алгебры и начал математического анализа 10–11 классов мы познакомимся с неалгебраическими уравнениями (тригонометрическими, логарифмическими, показательными).

Неалгебраические уравнения принято называть *трансцендентными*.

Тригонометрическим будем называть уравнение, содержащее неизвестное под знаком одной или нескольких тригонометрических функций.

Например, уравнения $\sin 2x = 1$, $\cos x + \cos 5x = 1$, $\sin(\cos x) = 1$ являются тригонометрическими, а уравнение $x^2 + x = \cos^2 1 + \cos 1$ тригонометрическим не является, так как неизвестное в нём не содержится под знаком тригонометрической функции.

При решении неалгебраических уравнений используются те же самые понятия, что при решении алгебраических уравнений.

Так *корнем (решением)* тригонометрического уравнения называют число, которое, будучи подставлено в уравнение, обращает его в верное числовое равенство, а *решить* тригонометрическое уравнение значит найти все его корни.

Пример 1. Проверьте, являются ли числа $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{\pi}{4}$ корнями уравнения $\cos x + \cos 5x = 1$.

Решение.

1) Подставим в уравнение число $\frac{\pi}{3}$:

$$\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} + \cos \left(\frac{5\pi}{3} - 2\pi \right) = \cos \frac{\pi}{3} + \cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = 1.$$

Получили верное числовое равенство $\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{3} = 1$, значит, $\frac{\pi}{3}$ – корень уравнения $\cos x + \cos 5x = 1$.

2) Подставим в уравнение число $\frac{\pi}{4}$. Получим $\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} = 0$.

Поскольку получилось неверное числовое равенство $0 = 1$, то число $\frac{\pi}{4}$ не является корнем уравнения $\cos x + \cos 5x = 1$.

В дальнейшем мы увидим, что между алгебраическими и тригонометрическими уравнениями обнаруживается важное отличие: тригонометрические уравнения могут иметь (и чаще всего имеют) бесконечное количество корней.

Это объясняется тем, что основные тригонометрические функции периодичны: каждое значение тригонометрической функции достигается при бесконечном количестве значений аргумента.

Пример 2. Решите уравнение $\sin x = 0$.

Решение. Построим в декартовой системе координат график функции $y = \sin x$.

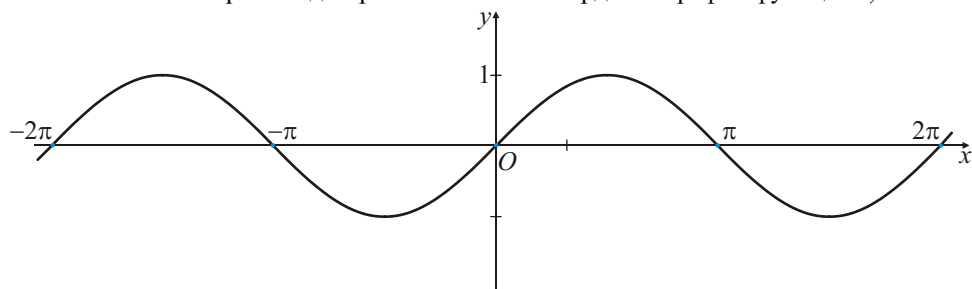


Рис. 2.1

Все корни уравнения $\sin x = 0$ представляют собой абсциссы точек пересечения графика функции с осью абсцисс.

На рисунке видно, что корни уравнения: $x = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$

Получается, что данное уравнение имеет бесконечное количество корней.

В таком случае множество корней приходится записывать в виде формулы (или нескольких формул).

Такая формула (несколько формул) и образует *общее решение* тригонометрического уравнения.

В данном случае общее решение можно записать в виде формулы: $x = \pi n$, где n принимает произвольные целые значения. Или, более коротко: $x = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. Решите уравнения $\cos x = -1$.

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y = \cos x$ и $y = -1$.

Корни уравнения $\cos x = -1$ представляют собой абсциссы точек пересечения этих графиков.

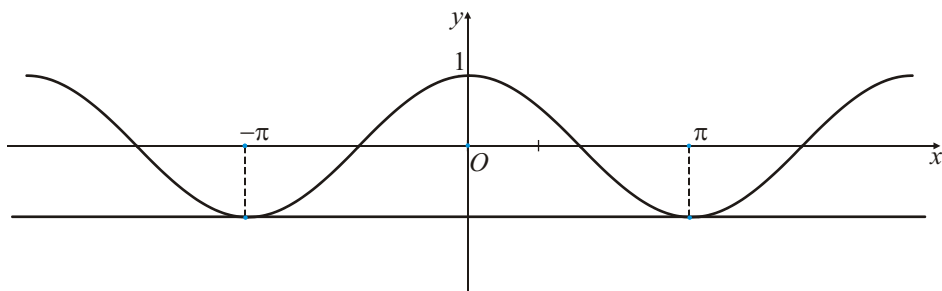


Рис. 2.2

Из рис. 2.2 видно, что $x = \pi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Тригонометрическое уравнение может и вовсе не иметь корней.

Скажем, уравнение $\cos x = 1,2$ корней не имеет, так как функция $y = \cos x$ ограничена, её значения не могут превышать 1.

Не существует единого метода, который позволил бы решить любое тригонометрическое уравнение; способы их решения чрезвычайно многообразны, в каждом конкретном случае свой способ решения исходного уравнения.

Наша цель научиться решать некоторые основные виды тригонометрических уравнений.

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

- а) Что называют тригонометрическим уравнением?
- б) Что называют корнем тригонометрического уравнения?
- в) Что называют общим решением тригонометрического уравнения?

2 Проверьте, являются ли данные числа корнями уравнений.

а) $\cos 2x \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, числа: $\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$;

б) $\sin 3x \cdot \cos 6x = 0$, числа: $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{12}$;

в) $\sin 2\pi x = \cos 3\pi x$, числа: $\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}$;

г) $\operatorname{tg} \pi x = 2 \cos^2 \pi x$, числа: $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}$.

3 Укажите корни уравнений, принадлежащие указанным промежуткам.

а) $\cos x = 0$, $(-\pi; \pi)$; в) $\operatorname{ctg} x = 0$, $(0; \pi)$

б) $\cos x = -1$, $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$; г) $\operatorname{tg} x = 0$, $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

4 Какие из данных уравнений не имеют корней?

а) $\sin x = \frac{\sqrt{7}}{3}$; б) $\cos 2x = \frac{\pi}{3}$; в) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 0$.

П

5 Начертите в тетради такую же таблицу и заполните:

Уравнение	$\cos x = 0$	$\cos x = 1$	$\cos x = -1$	$\operatorname{tg} x = 0$
Общее решение			$x = \pi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$	
Уравнение	$\sin x = 0$	$\sin x = 1$	$\sin x = -1$	$\operatorname{ctg} x = 0$
Общее решение	$x = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.			

6 Решите уравнение:

а) $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 0$; в) $\sin(\pi - x) = 1$; д) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$;
 б) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -1$; г) $\cos(\pi + x) = 1$; е) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 0$.

М

7 Придумайте тригонометрическое уравнение, одним из корней которого будет число:

а) $\frac{\pi}{3}$; б) $-\frac{\pi}{3}$; в) 0; г) -1.

8 Докажите, что корни уравнения $\sin x = 0$ являются корнями уравнения $\sin 5x = 0$.

9 Докажите, что уравнения $2 \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3$ и $2 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 1 = 0$ равносильны.

10 При каких значениях x верны равенства?

а) $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$; в) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 1$;
 б) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; г) $\sin x \cos x = 2$.

11 Решите уравнение.

а) $\sin^2 x = 1$; б) $\cos^2 x = 1$.

12 Могут ли уравнения $f(x) = g(x)$ и $\sin f(x) = \sin g(x)$ не быть равносильными? Если нет, объясните, почему. Если да, приведите примеры.

2.2. Простейшие тригонометрические уравнения

Простейшие тригонометрические уравнения – это уравнения одного из следующих видов $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, где a – некоторое действительное число.

При решении простейших тригонометрических уравнений будем, как и раньше, использовать графики основных тригонометрических функций: синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

Пример 1. Решите уравнение $\sin x = 0,5$.

Решение. Построим в одной системе координат график функций $y = \sin x$ и $y = 0,5$. Все корни уравнения $\sin x = 0,5$ представляют собой абсциссы точек пересечения этих графиков.

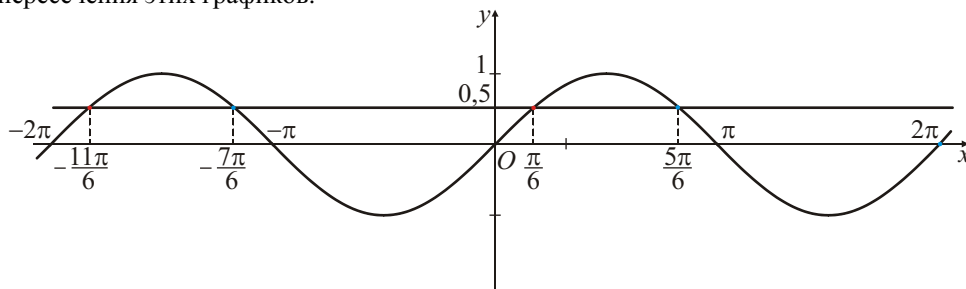


Рис. 2.3

Из рисунка видно, что все корни этого уравнения можно представить как объединение двух множеств:

1) Координат «красных» точек – пересечений графика прямой с левой частью «горба волны» синусоиды. Их можно задать формулой $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$ («первая серия» корней).

2) Координат «синих» точек – пересечений графика прямой с правой частью «горба волны» синусоиды. Их можно задать формулой $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$ («вторая серия» корней).

Ответ в уравнении дан в виде двух формул, но его можно записать (иногда это удобно, а иногда – нет) в виде одной формулы: $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Докажите это самостоятельно.

Из рассмотрения графиков функций $y = \sin x$ и $y = a$ (при $-1 < a < 1$) можно сделать следующие выводы. Функция $y = \sin x$ – периодическая функция с периодом 2π , поэтому на любом интервале длины 2π уравнение имеет два корня.

На интервале $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ – это $x_1 = \arcsin a$ и $x_2 = \pi - \arcsin a$, поэтому общее решение уравнения $\sin x = a$ имеет вид: $x_1 = \arcsin a + 2\pi n$ и $x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

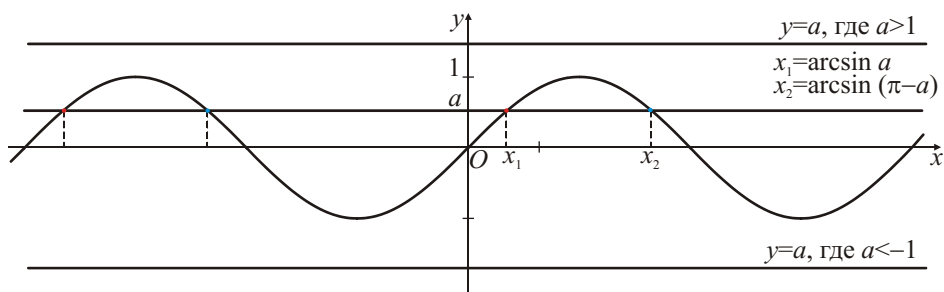


Рис. 2.4

Из графика также видно, что уравнение $\sin x = a$ может иметь корни только если $|a| \leq 1$. Вывод:

1. Если $|a| > 1$, то уравнение $\sin x = a$ корней не имеет

2. Если $|a| \leq 1$, то уравнение $\sin x = a$ имеет корни:

$$x_1 = \arcsin a + 2\pi n \text{ и } x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k, \text{ где } n, k \in \mathbb{Z}.$$

Иначе: $x = (-1)^n \cdot \arcsin a + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. Решите уравнение $\cos x = -0,5$.

Решение. Построим в одной системе координат график функций $y = \cos x$ и $y = -0,5$.

Все корни уравнения $\cos x = -0,5$ представляют собой абсциссы точек пересечения этих графиков.

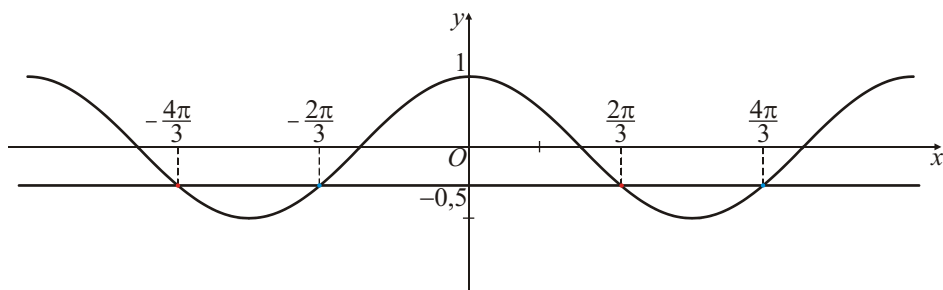


Рис. 2.5

Из рис. 2.5 видно, что все корни этого уравнения можно представить как объединение двух множеств:

1) Координат «красных» точек – пересечений графика прямой с левой частью «горба волны» косинусоиды. Их можно задать формулой $x_1 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$ («первая серия» корней).

2) Координат «синих» точек – пересечений графика прямой с правой частью «горба волны» косинусоиды. Их можно задать формулой $x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, где $k \in \mathbb{Z}$ («вторая серия» корней).

Ответ в уравнении записывают в виде одной формулы: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Из рассмотрения графиков функций $y = \cos x$ и $y = a$ можно сделать следующие выводы. Функция $y = \cos x$ периодическая функция с периодом 2π , поэтому на любом интервале длины 2π уравнение имеет два корня.

На интервале $[-\pi; \pi]$ это $x = \pm \arccos a$, поэтому общее решение уравнения $\cos x = a$ имеет вид: $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, а корни в уравнении $\cos x = a$ существуют только если $|a| \leq 1$.

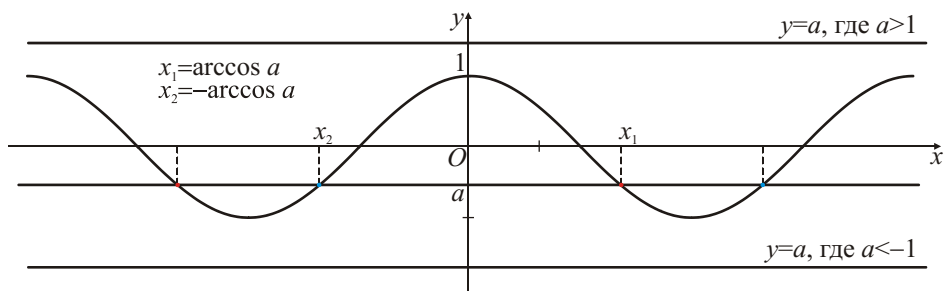


Рис. 2.6

1. Если $|a| > 1$, то уравнение $\cos x = a$ корней не имеет.
2. Если $|a| \leq 1$, то уравнение $\cos x = a$ имеет корни вида:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 3. Решите уравнение $\operatorname{tg} x = -1$.

Решение. Все корни уравнения $\operatorname{tg} x = -1$ представляют собой абсциссы точек пересечения графика функции $y = \operatorname{tg} x$ с прямой $y = -1$.

Из рисунка видно, что все корни этого уравнения можно представить в виде:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Из рассмотрения графиков функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = a$ (рис. 2.7) можно сделать следующий вывод. Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая функция с периодом π , на любом интервале длины π уравнение имеет один корень.

На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ это $x = \operatorname{arctg} a$, поэтому

Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет корни при любых действительных a :

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

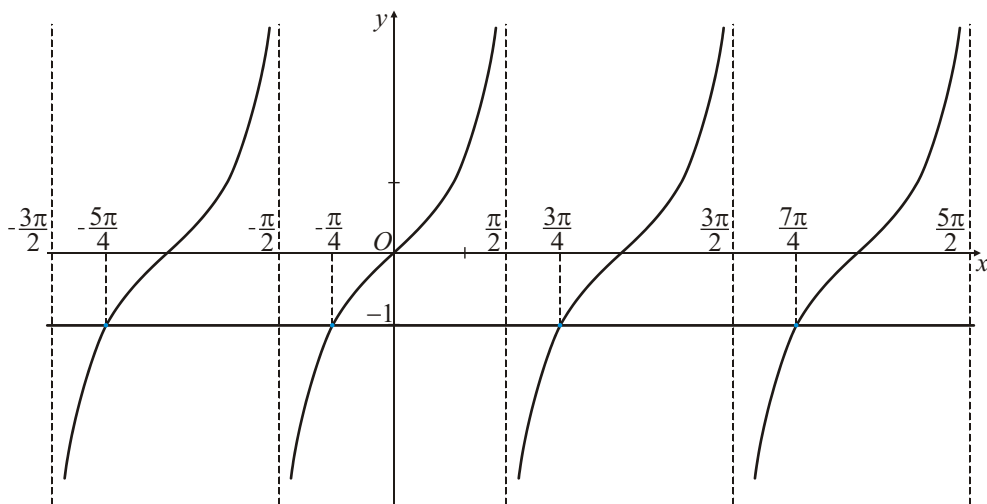


Рис. 2.7

Исследование уравнения вида $\operatorname{ctg} x = a$ проводится аналогично. Проведите его самостоятельно.

После этого можно будет сделать еще один важный вывод.

Простейшие тригонометрические уравнения:

- 1) либо совсем не имеют корней,
- 2) либо имеют бесконечно много корней.

Рассмотрим более сложное уравнение.

Пример 5. Решите уравнение $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

Решение. Решим сначала уравнение $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

Получим:

$$y = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{5} + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Вернёмся к переменной x :

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{5} + 2\pi n, \quad 2x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{5} + 2\pi n,$$

$$x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{3}}{5} + \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{8} \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{3}}{5} + \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

- а) Что называют простейшим тригонометрическим уравнением? Запишите общие решения простейших тригонометрических уравнений.
- б) При каких значениях a уравнение $\sin x = a$ имеет бесконечное количество корней?
- в) При каких значениях a уравнение $\cos x = a$ не имеет корней?

2 Выберите тригонометрические уравнения, имеющие корни.

- а) $\sin x = \frac{3}{4}$; в) $\sin x = \sqrt{3} - 1$; д) $\operatorname{tg} x = 5$;
- б) $\cos x = \sqrt{2}$; г) $\cos x = \frac{\pi}{3}$; е) $\operatorname{ctg} x = -2$.

3 Выберите уравнения, корнем которых является число $\frac{3\pi}{4}$.

- а) $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; д) $\operatorname{tg} x = 1$;
б) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; е) $\operatorname{tg} x = -1$.
в) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$; ж) $\operatorname{ctg} x = 1$.
г) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; з) $\operatorname{ctg} x = -1$.

4 Найдите корни уравнений, принадлежащие указанным промежуткам.

- а) $\sin x = \frac{1}{2}, \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; в) $\sin x = -\frac{1}{2}, (0; \pi)$;
б) $\cos x = -\frac{1}{2}, \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$; г) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, (\pi; 2\pi)$.

5 Найдите корни уравнений, принадлежащие указанным промежуткам.

- а) $\operatorname{tg} x = 1, \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$; в) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$;
б) $\operatorname{ctg} x = -1, (0; \pi)$; г) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}, (0; \pi)$.

6 Решите уравнения.

- а) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;
б) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;
в) $\cos x = \frac{1}{2}$; ж) $\operatorname{ctg} x = 1$;
г) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; з) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.

7 Решите уравнение.

- а) $\sin x = \sin \frac{\pi}{7}$; в) $\sin x = \cos \frac{\pi}{5}$; д) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12}$;
б) $\cos x = \cos \frac{\pi}{10}$; г) $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}$; е) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8}$.

8 Решите уравнение.

а) $\sin x = 0,9$;

б) $\cos x = -0,6$;

в) $\operatorname{tg} x = 2,5$;

г) $\operatorname{ctg} x = 1,6$.

9 Решите уравнение.

а) $\sin \frac{2}{3}x = \frac{1}{2}$;

б) $\sin \frac{6}{5}x = -\frac{1}{2}$;

в) $\cos \frac{5}{3}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\cos \frac{1}{6}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

10 Решите уравнение.

а) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$;

б) $\operatorname{tg} 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $\operatorname{ctg} 4x = -1$;

г) $\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = \sqrt{3}$.

П

11 Решите уравнение.

а) $\cos(2x + \pi) = \frac{1}{2}$;

б) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$;

г) $\sin\left(3x + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

12 Решите уравнение.

а) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\sin\left(\frac{\pi}{12} - 2x\right) = -\frac{1}{2}$.

13 Решите уравнение.

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) = 1$;

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

в) $\operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) = -1$;

г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$.

14 Решите уравнение.

а) $|\cos 2x| = 1$;

б) $|2\sin 3x| = \sqrt{2}$;

в) $|\cos 2x - 2| = 1$;

г) $|2\sin 3x + 2\sqrt{2}| = \sqrt{2}$.

15 Решите уравнение.

а) $4\cos^2 x = 1$;

в) $\operatorname{tg}^2 x = 1$;

б) $4\sin^2 x = 3$;

г) $\operatorname{ctg}^2 x = 3$.

М

16 Решите уравнение.

а) $\sin x = \cos x$;

в) $|\sin x| = \cos x$;

б) $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$;

г) $|\operatorname{tg} x| = \operatorname{ctg} x$.

17 Решите уравнение.

а) $\sin \sqrt{x} = 0$;

в) $\cos \frac{\pi}{x} = 0$;

б) $\cos|x| = 1$;

г) $\sin x^2 = -1$.

18 Решите уравнение

а) $\sin \frac{2\pi}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\cos \frac{\pi}{x} = \frac{1}{2}$;

б) $\sin \frac{3\pi}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\sin \frac{3\pi}{x^2} = -\frac{1}{2}$;

19 Сколько корней имеет уравнение?

а) $\cos x = x$;

в) $\sin x = -x$;

б) $\sin x = x^2$;

г) $\cos x = -x^2$.

20 Выведите общую формулу корней тригонометрического уравнения $\operatorname{ctg} x = a$.

2.3. Простейшие тригонометрические неравенства

Тригонометрическим называют неравенство, содержащее неизвестное под знаком одной или нескольких тригонометрических функций.

При решении тригонометрических неравенств используют те же самые понятия, что при решении алгебраических неравенств.

Так, *решением* тригонометрического неравенства с одним неизвестным называется число (значение неизвестного), при подстановке которого в неравенство получается верное числовое неравенство.

Решить тригонометрическое неравенство означает найти все его решения (или убедиться, что их нет).

Тригонометрические неравенства сводятся, как правило, к одному или нескольким простейшим тригонометрическим неравенствам.

Простейшее тригонометрическое неравенство – это неравенство одного из следующих видов:

$\sin x * a$, $\cos x * a$, $\operatorname{tg} x * a$, $\operatorname{ctg} x * a$, где символ $*$ может означать один из символов $>$, $<$, $\geq$, $\leq$.

При решении простейших тригонометрических неравенств, как и при решении простейших тригонометрических уравнений, мы будем использовать графики соответствующих тригонометрических функций.

Пример 1. Решите неравенство $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y = \cos x$ и $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

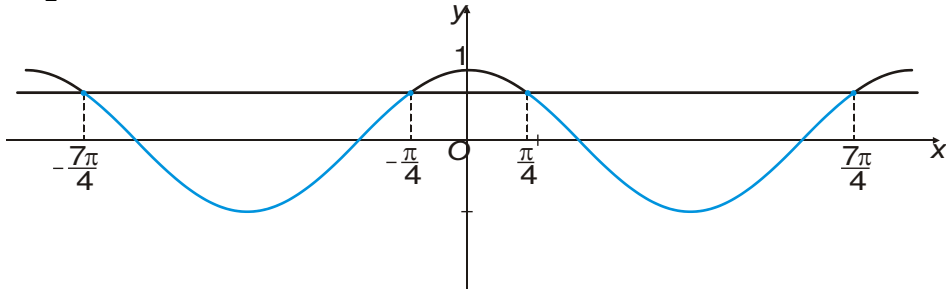


Рис. 2.8

Абсциссы точек пересечения графиков ($x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$) являются корнями уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Функция $y = \cos x$ периодична с периодом 2π , поэтому найдём решения неравенства на промежутке $[0; 2\pi]$ длиной 2π .

Из рисунка видно, что это $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

Решение неравенства состоит из бесконечного («в обе стороны») количества промежутков:

$$\dots; \left(-\frac{7\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right); \left(\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right); \dots$$

Запишем общее решение неравенства:

$$x \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \right), \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \right)$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. Решите неравенство $\operatorname{tg} 0,5x \leq \sqrt{3}$.

Решение. Сначала решим простейшее неравенство $\operatorname{tg} t \leq \sqrt{3}$.

Построим в одной системе координат графики функций $y = \operatorname{tg} t$ и $y = \sqrt{3}$.

Абсциссы точек пересечения графиков – корни уравнения $\operatorname{tg} t = \sqrt{3}$, т.е.

$$t = \frac{\pi}{3} + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

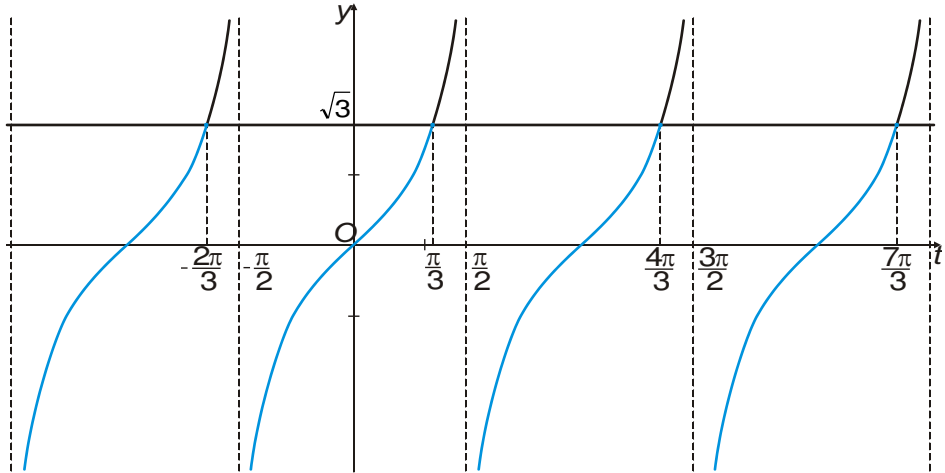


Рис. 2.9

Функция $y = \operatorname{tg} t$ периодична с периодом π , поэтому найдём решения неравенства на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ длиной π . Из рисунка понятно, что это

$$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3} \right].$$

Решение неравенства $\operatorname{tg} t \leq \sqrt{3}$ состоит из бесконечного («в обе стороны») количества промежутков:

$$\dots \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{2\pi}{3} \right], \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3} \right], \dots$$

Общее решение: $t \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k \right]$, где $k \in \mathbb{Z}$. Теперь, учитывая, что $x = 2t$,

запишем ответ: $\left(-\pi + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right]$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. Решите неравенство $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$.

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y = \sin s$ и $y = \frac{1}{2}$.

Абсциссы точек пересечения графиков – корни уравнения $\sin s = \frac{1}{2}$, т.е.

$s_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $s_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

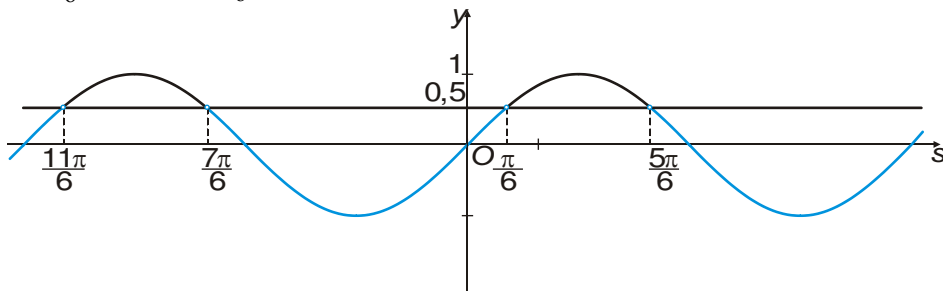


Рис. 2.10

Решение неравенства $\sin s < \frac{1}{2}$ состоит из промежутков:

$$\dots; \left(-\frac{7\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \right); \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{13\pi}{6} \right); \dots$$

Общее решение: $s \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k \right)$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Осталось решить неравенство:

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k < 2x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6} + 2\pi k.$$

Получим: $-\pi + 2\pi k < 2x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{6} + \pi k$.

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k \right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 4. Решите неравенство $-\frac{1}{2} < \cos 3x < \frac{1}{2}$.

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y = \cos t$, $y = \frac{1}{2}$ и $y = -\frac{1}{2}$

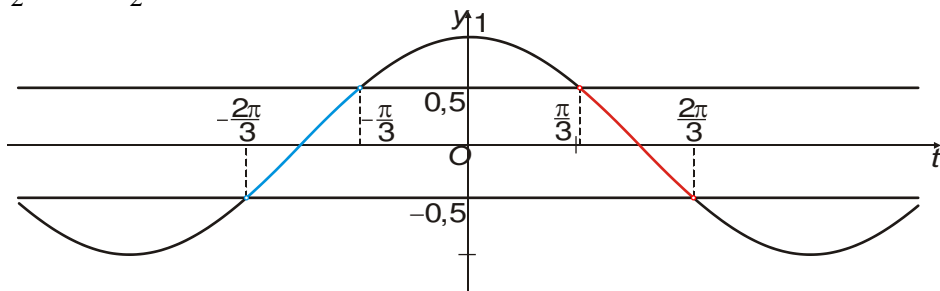


Рис. 2.11

Из рис. 2.11 получим две серии решений неравенства $-\frac{1}{2} < \cos t < \frac{1}{2}$:

1) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < t < -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, откуда

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < 3x < -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad -\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3} < x < -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, \quad \text{где } n \in \mathbb{Z}.$$

2) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, откуда

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi k < 3x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3} < x < \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(-\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}; -\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}\right) \cup \left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}\right)$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

При решении тригонометрических неравенств важно помнить, что абсолютные значения функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ не превышают 1.

Например, неравенство $\sin x > 2$ не имеет решений, а решением неравенства $\cos 2x \leq 4$ является любое действительное число.

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

- Что называют тригонометрическим неравенством?
- Что называют решением тригонометрического неравенства?
- Что значит решить тригонометрическое неравенство?

2 Решите неравенство.

- а) $\cos x < \frac{1}{2}$; в) $\sin x \geq \frac{1}{2}$;
б) $\cos x \geq \sqrt{3}$; г) $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3 Решите неравенство.

- а) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$; в) $\operatorname{ctg} x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$;
б) $\operatorname{tg} x \leq 5$; г) $\operatorname{ctg} x > \frac{1}{3}$.

4 Решите неравенство.

- а) $\cos 3x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin 2x \leq -\frac{1}{2}$;
б) $\cos \frac{x}{2} \geq -\frac{1}{2}$; г) $\sin \frac{x}{4} > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5 Решите неравенство.

- а) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}$; в) $\operatorname{tg}\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) > 1$;
б) $\sin\left(\frac{2x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) \leq 0$.

II

6 Решите неравенство.

- а) $|\cos x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$; в) $|\sin 2x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$;
б) $|\sin x| > \frac{1}{2}$; г) $\left|\cos \frac{x}{2}\right| < \frac{1}{2}$.

7 Решите неравенство.

- а) $\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $1 < \operatorname{tg} x < 2$.

8 Решите неравенство.

- а) $2 \cos^2 2x \leq 1$; б) $2 \sin^2 3x < 1$.

М

9 Решите неравенство, используя графическую интерпретацию.

- а) $\sin x > \cos x$; б) $\sin x > -\cos x$.

10 При каких значениях a имеет решения неравенство?

- а) $\sin x \cos x < a$; б) $\cos^2 x - \sin^2 x \geq a$.

11 При каких значениях a неравенство не имеет решений?

- а) $\sin^2 x > a$; б) $\sin^2 x \leq a$; в) $\sin x + \cos x > a$.

12 При каких значениях a решением неравенства является любое число?

- а) $\sin^2 x < a$; б) $\sin^2 x \geq a$; в) $\sin x + \cos x \leq a$.

2.4. Решение тригонометрических уравнений: метод разложения на множители

В этом параграфе мы продолжим изучение тригонометрических уравнений.

Решение тригонометрических уравнений обычно сводится к тождественным преобразованиям, при которых данное уравнение заменяют другим, равносильным уравнением, но более простым. Полученное уравнение заменяют другим, и так действуют до тех пор, пока не получится одно или несколько простейших тригонометрических уравнений.

Иногда это удаётся сделать с помощью сравнительно несложных тригонометрических преобразований

Пример 1. Решите уравнение

$$\cos 3x \cdot \cos 2x - \sin 3x \cdot \sin 2x = 1.$$

Решение. Воспользовавшись формулой $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, преобразуем уравнение к виду:

$$\cos(2x + 3x) = 1, \cos 5x = 1, 5x = 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{2\pi k}{5}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. Решите уравнение

$$\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{8}.$$

Решение. Воспользовавшись формулой $\sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha$, преобразуем уравнение:

$$2 \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = \frac{1}{4}, \quad \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{4}, \quad 2 \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{1}{2},$$

$$\sin 4x = \frac{1}{2}, \quad 4x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Но так просто получается не всегда. Повторим, что не существует общего подхода, эффективного при решении любого тригонометрического уравнения. Как же быть?

Вспомним, что, решая алгебраические уравнения, мы пользовались либо *методом разложения на множители* либо *методом замены неизвестного*. Эти методы применимы к тригонометрическим уравнениям и иногда позволяют существенно упростить исходное уравнение или свести его к нескольким более простым.

Решим несколько уравнений *методом разложения на множители*.

Вспомним, в чём суть этого метода. Вначале рассмотрим уравнение, у которого левая часть представляет собой произведение тригонометрических функций, а правая равна нулю.

Для того, чтобы произведение нескольких сомножителей было равно нулю, необходимо, чтобы хотя бы один из них был равен нулю.

Поэтому приравняем к нулю каждый из сомножителей и найдём корни полученных уравнений.

Затем, проверим, что при полученных значениях корней все сомножители определены (не теряют смысла).

Пример 3. Решите уравнение

$$(\sin x - 1)(2 \cos x - 1) = 0.$$

Решение. Произведение равно нулю. Следовательно, хотя бы один из сомножителей равен нулю. Возможны два случая:

1) $\sin x = 1$, тогда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos x = \frac{1}{2}$, тогда $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$.

При полученных значениях корней все сомножители определены (не теряют смысла), так как и синус и косинус определены при любых значениях аргумента.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi s$, $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m$, где $s, m \in \mathbb{Z}$.

Если при подстановке корней в уравнение хотя бы один из множителей не определён (теряет смысл), то такие корни называют *посторонними*.

Пример 4. Решите уравнение

$$\cos x \cdot (\operatorname{tg} x - 1) = 0$$

Решение. Произведение равно нулю, если $\cos x = 0$ или $\operatorname{tg} x = 1$.

1) Если $\cos x = 0$, то $\operatorname{tg} x$ не существует, т.к. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, а знаменатель дроби не может равняться нулю.

То есть все корни уравнения $\cos x = 0$, являются *посторонними* для уравнения $\cos x(\operatorname{tg} x - 1) = 0$

2) Если $\operatorname{tg} x = 1$, то $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in Z$.

Пример 5. Решите уравнение:

$$\sin^2 x = \sin x.$$

Решение. Перенесем $\sin x$ в левую часть уравнения и затем вынесем его за скобки:

$$\sin^2 x - \sin x = 0, \quad \sin x(\sin x - 1) = 0.$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю. Возможны два случая:

1) $\sin x = 0$, тогда $x = \pi n$, где $n \in Z$

2) $\sin x = 1$, тогда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in Z$

Ответ: $\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $n, k \in Z$.

Пример 6. Решите уравнение

$$1 + \sin x \cdot \cos x = \sin x + \cos x.$$

Решение. Перенесем все слагаемые в левую часть и полученное выражение разложим на множители методом группировки:

$$1 + \sin x \cdot \cos x - \sin x - \cos x = 0,$$

$$1 - \sin x + \sin x \cdot \cos x - \cos x = 0,$$

$$(1 - \sin x) - \cos x(1 - \sin x) = 0,$$

$$(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0.$$

Таким образом, уравнение сводится к двум простейшим уравнениям $\sin x = 1$ и $\cos x = 1$.

Осталось рассмотреть случаи:

1) $\sin x = 1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in Z$

2) $\cos x = 1$, откуда $x = 2\pi n$, где $n \in Z$

Ответ: $2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $n, k \in Z$.

Таким образом, можно сформулировать следующий план решения тригонометрических уравнений методом разложения на множители:

1. Представить уравнение в виде произведения равного нулю.
2. Приравнять к нулю каждый из получившихся множителей.
3. Решить полученные уравнения.
4. Исключить корни, при которых исходное уравнение не имеет смысла.
5. Записать ответ.

Решая уравнения из предыдущих примеров, мы обошлись без формул тригонометрии: нам было достаточно алгебраических преобразований (вынесения множителя за скобки, группировки, формул, сокращенного умножения). Понятно, что так бывает далеко не всегда. Для решения более сложных уравнений тригонометрические преобразования необходимы.

Пример 7. Решите уравнение:

$$\cos 5x = \cos 3x.$$

Решение. Воспользуемся формулой $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$.

Преобразуем уравнение:

$$\cos 5x - \cos 3x = 0, \quad -2 \sin 4x \cdot \sin x = 0.$$

Произведение равно нулю, если $\sin 4x = 0$ или $\sin x = 0$.

Из первого уравнения: $\sin 4x = 0$, откуда $4x = \pi n$ и $x = \frac{\pi n}{4}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Из второго уравнения: $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi n}{4}$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 8. Решите уравнение

$$\sin 2x + \cos 6x = 0.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\sin 2x + \sin \left(\frac{\pi}{2} - 6x \right) = 0.$$

Воспользуемся формулой $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$.

Получим:

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) \cos \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

Осталось решить уравнения:

$$\sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad \text{и} \quad \cos \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) = 0.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

Можно сформулировать следующий вывод:

Уравнения вида

$$\sin f(x) \pm \sin g(x) = 0, \quad \cos f(x) \pm \cos g(x) = 0, \quad \sin f(x) \pm \cos g(x) = 0$$

можно с помощью формул суммы (разности) тригонометрических функций представить в виде произведения тригонометрических функций, равного 0.

Решим более сложное уравнение.

Пример 9. Решите уравнение:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0.$$

Решение. Сгруппируем слагаемые в левой части:

$$(\sin x + \sin 3x) + (\sin 2x + \sin 4x) = 0$$

Дважды применим формулу, преобразующую разность синусов в произведение.

Получим:

$$2 \sin 2x \cos x + 2 \sin 3x \cos x = 0,$$

Внесем общий множитель за скобки и применим указанную формулу ещё раз:

$$2 \cos x (\sin 2x + \sin 3x) = 0, \quad 4 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x = 0.$$

Осталось решить простейшие тригонометрические уравнения:

$$\sin \frac{5x}{2} = 0; \quad \cos \frac{x}{2} = 0; \quad \cos x = 0.$$

Ответ: $\frac{2\pi n}{5}, \pi + 2\pi k, x = \frac{\pi}{2} + \pi l$, где $n, k, l \in \mathbb{Z}$.

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

а) Как решают уравнения методом разложения на множители?

б) Что называют посторонним корнем?

в) Как можно упростить уравнения вида $\sin f(x) = \sin g(x)$, $\cos f(x) = \cos g(x)$, $\sin f(x) = \cos g(x)$?

2 Решите уравнение.

а) $\cos x \cdot \sin 2x = 0$;

г) $(\sin x + 1) \cdot (\cos 2x - 1) = 0$;

б) $\sin x \cdot \cos 2x = 0$;

д) $\sin 2x \cdot (1 - \sqrt{2} \cos x) = 0$;

в) $(\sin 2x + 1) \cdot (\cos x - 1) = 0$;

е) $\cos 2x \cdot (1 - \sqrt{2} \sin x) = 0$.

3 Решите уравнение.

- а) $\cos^2 x = \cos x$;
б) $\sqrt{2} \sin^2 x = \sin x$;
в) $\cos x \cdot (\cos 2x + 1) = \cos x$;
г) $2 \sin^2 x = \sin x$;
д) $\sin x \cos x = 2 \sin x$;
е) $\sin 3x \cdot (\sin 2x - 1) = \sin 3x$.

4 Решите уравнение.

- а) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$;
б) $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x + 1 = 0$;
в) $3 \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x = 0$;
г) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 1 = 0$.

5 Решите уравнение, воспользовавшись одной из формул суммы (разности) тригонометрических функций.

- а) $\cos 3x \cdot \cos 2x = \cos 5x$;
б) $\sin 3x \cdot \sin 2x = -\cos 5x$;
в) $\cos 4x \cdot \sin x = \sin 5x$;
г) $\cos 4x \cos 5x = \cos x$;
д) $\sin 2x \cos 3x = -\sin x$;
е) $\sin 4x \cdot \cos x = \sin 5x$.

6 Решите уравнение.

- а) $\sin 4x = \sin 5x$;
б) $\sin 5x = -\sin x$;
в) $\cos 3x = \cos 5x$;
г) $\cos 7x = -\cos 13x$;
д) $\cos 3x = \sin x$;
е) $\cos 2x = \sin 3x$.

7 Решите уравнение.

- а) $1 + \sin x \cdot \sin 2x = \sin x + \sin 2x$;
б) $2 \sin 2x + 2 \sin x = 3 + 6 \cos x$;
в) $\operatorname{tg} x - \sin x = 1 - \operatorname{tg} x \cdot \sin x$;
г) $\sqrt{3} \sin x + \sin x \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x + \sqrt{3}$.

8 Решите уравнение.

- а) $\sin 2x \cdot \operatorname{ctg} x = 0$;
б) $\cos 3x \cdot \operatorname{ctg} x = 0$;
в) $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x = 0$;
г) $\cos 3x \cdot \operatorname{tg} x = 0$.

II

9 Решите уравнение:

- а) $1 + \cos 2x = \cos x$;
б) $1 - \cos 2x = 2 \sin x$;
в) $3 \sin 2x = 2 \sin x$;
г) $3 \sin 2x = 2 \cos x$.

10 Решите уравнение.

- а) $\cos 2x \sin^2 x = \cos 2x \cos^2 x$;
б) $\sin 3x \sin^2 x = \sin 3x \cos^2 x$;
в) $\cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 2x$;
г) $\cos^2 x = \sin 4x + \sin^2 x$.

11 Решите уравнение.

а) $1 - \sin 6x = (\cos x - \sin x)^2$;

б) $1 + \sin 2x = (\cos 3x + \sin 3x)^2$;

в) $2 \cos^2 x - 1 = \sin 3x$;

г) $1 - \sin 10x = 2 \sin^2 4x$.

12 Решите уравнение.

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin 2x$;

б) $\cos 3x = \sin\left(\frac{9\pi}{2} + x\right)$;

в) $\cos(\pi - 3x) = \sin 2x$;

г) $\sin\left(8x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos x$.

13 Решите уравнение.

а) $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$;

б) $\cos 3x = \cos 2x - \cos x$;

в) $\cos x + \cos 4x + \cos 7x = 0$;

г) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

М

14 Решите уравнение.

а) $\sin^2 2x + \cos^2 3x = 1$;

б) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$;

в) $\sin^2 2x + \sin^2 x = 1$;

г) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x$.

15 Решите уравнение.

а) $\sin x + \sin 3x = \sin 2x + \sin 4x$;

б) $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$;

в) $\cos 2x + \cos 8x = 1 + \cos 6x$;

г) $1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$.

16 Решите уравнение.

а) $\sin 3x \cdot \sin x + \sin 8x \cdot \sin 4x = 0$;

б) $\sin 5x \cdot \cos 3x = \sin 6x \cdot \cos 2x$;

в) $\cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x$;

г) $\sin 2x \cdot \sin 6x = \cos 3x \cdot \cos x$.

17 Найдите все корни уравнения $(1 - \cos 2x) \sin 2x = \sqrt{3} \sin^2 x$, лежащие на отрезке

$$\left[-\pi; \frac{\pi}{3}\right]$$

18 Найдите наименьший положительный и наибольший отрицательный корни уравнения.

а) $\sin x - \cos 3x = 0$;

б) $\sin 3x + \cos x = 0$.

2.5. Решение тригонометрических уравнений: метод замены неизвестного

Вначале рассмотрим уравнение, у которого неизвестное уже содержится под знаком одной тригонометрической функции.

Пример 1. Решите уравнение

$$2 \sin^2 2x + 2 = 5 \sin 2x.$$

Решение. Данное уравнение содержит одну тригонометрическую функцию $\sin 2x$. Выполним замену: $\sin 2x = a$. Получим уравнение:

$$2a^2 + 2 = 5a, \quad 2a^2 - 5a + 2 = 0, \quad \text{откуда } a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{1}{2}.$$

Исходное уравнение удалось свести к двум простейшим тригонометрическим уравнениям:

1) $\sin 2x = 2$, это уравнение корней не имеет, так как значения синуса не могут превышать 1.

$$2) \sin 2x = \frac{1}{2}, \text{ откуда } 2x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Если уравнение содержит различные тригонометрические функции, то можно все эти функции попытаться выразить через одну и, выполнив замену, получить алгебраическое уравнение.

Пример 2. Решите уравнение: $2 \sin^2 x = 3 \cos x$.

Решение. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и перепишем уравнение в виде:

$$2(1 - \cos^2 x) = 3 \cos x, \quad 2 - 2 \cos^2 x = 3 \cos x, \quad 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0.$$

Обозначим $\cos x = a$. Получим квадратное уравнение:

$$2a^2 + 3a - 2 = 0, \text{ откуда } a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_2 = -2.$$

Уравнение $\cos x = -2$ корней не имеет.

$$\text{Решив уравнение } \cos x = \frac{1}{2}, \text{ получим ответ: } \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Итак, чтобы решить тригонометрическое уравнение методом замены неизвестного можно попытаться:

1. Преобразовать тригонометрическое уравнение к виду, содержащему только одну тригонометрическую функцию.
2. Принять эту функцию за новое неизвестное, решить соответствующее алгебраическое уравнение. Тем самым будут найдены значения выбранной функции, которые дадут совокупность простейших тригонометрических уравнений.
3. Решить простейшие тригонометрические уравнения и записать ответ.

Посмотрим, как реализуется этот план в случае так называемых однородных тригонометрических уравнений.

Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = 0$, где a и b – произвольные числа, принято называть *однородным тригонометрическим уравнением первой степени* (относительно $\sin x$ и $\cos x$).

Уравнение вида $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$, где a , b и c – произвольные числа, принято называть *однородным тригонометрическим уравнением второй степени* (относительно $\sin x$ и $\cos x$).

Однородные уравнения других степеней определяют аналогично.

Однородное тригонометрическое уравнение можно свести к алгебраическому уравнению относительно $\operatorname{tg} x$ и решать методом замены.

Посмотрим, как это происходит в случае однородного тригонометрического уравнения второй степени.

Пример 3. Решите уравнение.

$$3 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = \cos^2 x.$$

Решение. Рассмотрим два случая:

1) Если $\cos x = 0$, то после преобразований уравнение примет вид: $\sin x = 0$.

Условия $\cos x = 0$ и $\sin x = 0$ одновременно выполняться не могут, – это противоречит основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Следовательно, $\cos x \neq 0$.

2) Разделим обе части уравнения на $\cos x$. Получим уравнение:

$$3 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 1 = 0.$$

Обозначим $\operatorname{tg} x = t$. Получим квадратное уравнение

$$3t^2 + 2t - 1 = 0, \text{ откуда } t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = -1.$$

Осталось решить уравнения: $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$ и $\operatorname{tg} x = -1$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4. Решите уравнение

$$\cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cdot \cos x = 0$$

Решение.

1) Если $\cos x = 0$, то уравнение обращается в верное равенство, следовательно, множеству корней уравнения принадлежат числа $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

2) Если $\cos x \neq 0$, то, разделив уравнение на $\cos^2 x$, получим уравнение:

$$1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0; \quad \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $-\frac{\pi}{6} + \pi n$, где $k, n \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, чтобы решить однородное тригонометрическое уравнение можно действовать по следующему плану.

1. Проверить прямой подстановкой являются ли решениями данного уравнения корни уравнения $\cos x = 0$.
2. Разделить обе части уравнения на $\cos x \neq 0$, получив, тригонометрическое уравнение, содержащее только одну тригонометрическую функцию – тангенс.
3. Принять $\operatorname{tg} x$ (или $\operatorname{ctg} x$) за новое неизвестное, решить соответствующее алгебраическое уравнение. Тем самым будут найдены значения выбранной функции, которые дадут совокупность простейших тригонометрических уравнений.
4. Решить простейшие тригонометрические уравнения и записать ответ.

К однородному уравнению можно свести уравнение вида $a \sin x + b \cos x = c$.

Пример 5. Решим уравнение $3 \sin x + 5 \cos x = -3$.

Воспользуемся формулами $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ и основным тригонометрическим тождеством:

$$3 \cdot \left(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) + 5 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = -3 \left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right);$$
$$\sin^2 \frac{x}{2} - 3 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - 4 \cos^2 \frac{x}{2} = 0.$$

Получили однородное тригонометрическое уравнение второй степени, которое сводится к уравнению:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 4 = 0.$$

Обозначим $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, получим квадратное уравнение $t^2 - 3t - 4 = 0$, откуда $t_1 = 4$,

$t_2 = -1$. Решив уравнения $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 4$ и $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1$, получим ответ.

Ответ: $2 \operatorname{arctg} 4 + 2\pi k$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $k, n \in \mathbb{Z}$.

Уравнение вида $a \sin x + b \cos x = c$ можно решить, преобразовав его к однородному тригонометрическому уравнению относительно $\sin \frac{x}{2}$ и $\cos \frac{x}{2}$

Встречаются и более сложные замены.

Пример 6. Решим уравнение

$$2 \sin x + 2 \cos x + \sin 2x = 2.$$

Пусть $\sin x + \cos x = a$, тогда

$$(\sin x + \cos x)^2 = a^2, \quad 1 + 2 \sin x \cos x = a^2, \quad \sin 2x = a^2 - 1.$$

Получим:

$$a^2 + 2a - 3 = 0, \text{ откуда } a_1 = 1, a_2 = -3.$$

Осталось рассмотреть случаи:

1) $\sin x + \cos x = 1$, откуда $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\sin x + \cos x = -3$, откуда

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x) = -\frac{3}{\sqrt{2}}, \quad \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} = -\frac{3}{\sqrt{2}}, \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Последнее уравнение корней не имеет. Впрочем, это можно было заметить сразу, если вспомнить неравенство $-\sqrt{2} \leq \sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$, верное при всех x .

Ответ: $2\pi k$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

- а) Как решают уравнения методом замены неизвестного?
- б) Какие тригонометрические уравнения называют однородными?
- в) Как решают однородные уравнения?

2 Решите уравнение:

- а) $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$;
- б) $2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 = 0$;
- в) $3 \sin^2 2x - 10 \sin 2x + 3 = 0$;
- г) $\cos^2 2x - 2 \cos 2x - 3 = 0$.

3 Решите уравнение:

- а) $\operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x = 4$;
- б) $2 \operatorname{tg} x - \frac{2}{\operatorname{tg} x} = 3$;
- в) $\operatorname{tg} x \cdot (1 + \operatorname{tg} x) = 1 - \operatorname{tg} x$;
- г) $\operatorname{tg}^4 x - 3 \operatorname{tg}^2 x + 2 = 0$.

4 Решите уравнение.

а) $2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0$;

в) $6 \cos^2 x + 5 = 5 \sin x$;

б) $2 \sin^2 2x + 3 \cos 2x - 3 = 0$;

г) $5 \sin^2 x + 4 \cos x = 4$.

5 Решите однородное уравнение первой степени.

а) $\sin x = \cos x$;

в) $\sin x = \sqrt{3} \cos x$;

б) $\sin x + \cos x = 0$;

г) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 0$.

6 Решите однородное уравнение первой степени.

а) $3 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = \cos^2 x$;

в) $3 \sin^2 x + \cos^2 x = 4 \sin x \cos x$;

б) $5 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x = \sin^2 x$;

г) $2 \sin^2 x + 6 \cos^2 x = 7 \sin x \cos x$.

7 Решите уравнение.

а) $\sin^4 x = \cos^4 x$;

в) $\sin^3 x + \cos^3 x = 0$;

б) $3 \sin^2 x = \cos^2 x$;

г) $\sin^2 x = 3 \cos^2 x$.

8 Решите уравнение.

а) $\sin x \cdot \cos x = \cos^2 x$;

в) $\sin^2 x + \sqrt{3} \sin x \cdot \cos x = 0$;

б) $\sin x \cdot \cos x = \sin^2 x$;

г) $\cos^2 x = \sqrt{2} \sin x \cos x$.

II

9 Решите уравнение.

а) $5 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x = 4$;

в) $\cos^2 x + 2 = 5 \sin x \cos x$;

б) $2 \sin^2 x + 2 = 5 \sin x \cos x + 8 \cos^2 x$;

г) $\cos^2 x + 2\sqrt{2} \cos x \sin x + 1 = 0$.

10 Решите уравнение:

а) $\sin^3 x = \sin 2x - 2 \sin x$;

в) $3 \sin x + \sin 2x = \cos 2x \sin x$;

б) $\cos^3 x = 2 \sin 2x + 4 \cos x$;

г) $\cos 2x \cos x + 2 \sin 2x = 3 \cos x$.

M

11 Решите уравнение.

а) $\sin x + \cos x = 1$;

в) $4 \sin x + 3 \cos x = 5$;

б) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$;

г) $3 \sin x - 2 \cos x = 2$.

12 Решите уравнение.

а) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$; в) $\cos 2x + \operatorname{tg} x = 1$;

б) $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{5\pi}{4}\right) + 1$; г) $\sin 2x + \operatorname{ctg} x = 2$.

13 Решите уравнение.

а) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2$;

б) $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 4$;

в) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x + 4 = 0$.

14 Решите уравнение.

а) $2 \sin^3 x = \cos x$;

в) $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos x$;

б) $2 \cos^3 x = \sin x$;

г) $4 \sin^3 x = \sin x + \cos x$.

15 а) $\cos 9x - 2 \cos 6x = 2$; б) $\sin x + \cos^2 x - \sin^3 x = 0$.

16 При каких значениях a имеет корни уравнение?

а) $\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x = a$;

в) $\sin^2 x + 2 \sin x = a$;

б) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = a$;

г) $\sin^2 x + 2 \cos x = a$.

2.6. Примеры решения систем тригонометрических уравнений

Системами тригонометрических уравнений (тригонометрическими системами) будем называть системы уравнений, которые образованы либо только тригонометрическими уравнениями, либо тригонометрическими и алгебраическими уравнениями.

Решением уравнения (системы уравнений) с двумя неизвестными называют пару чисел, которая при подстановке в каждое из уравнений системы обращает его в верное числовое равенство. Здесь понятие *решение*, соответствует понятию *корень*, применяемому при решении одного уравнения с одним неизвестным.

Решить систему уравнений означает найти все её решения или обосновать, что других решений нет.

Соответствующие понятия для систем с произвольным количеством неизвестных определяются аналогично.

Слово «решение» имеет ещё и другое значение – порядок действий, приводящий к получению правильного ответа. Значение этого слова зависит от ситуации и обычно не вызывает недоразумений.

В данном параграфе мы на простых примерах рассмотрим приёмы, используемые при решении систем тригонометрических уравнений.

Тригонометрические системы решают теми же методами, что и алгебраические системы, опираясь на свойства тригонометрических функций, используя тригонометрические преобразования.

Сначала рассмотрим пример системы, в которой одно из уравнений является алгебраическим (линейным) уравнением.

Такие системы обычно решают методом подстановки.

Пример 1. Решите систему:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ x + y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение. Выполним подстановку $y = \frac{\pi}{2} - x$.

Первое уравнение системы примет вид:

$$\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1, \quad 2 \sin x = 1, \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

Получим: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

Найдем соответствующие значения y :

$$1) \text{ Если } x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \text{ то } y = \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) = \frac{\pi}{3} - 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \text{ Если } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \text{ то } y = \frac{\pi}{2} - x = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right) = -\frac{\pi}{3} - 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} - 2\pi n\right), \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} - 2\pi k\right), \text{ где } n, k \in \mathbb{Z}.$$

Из записи ответа должно быть понятно, как именно искоемые значения x и y объединены в пары, поэтому при решении тригонометрических систем корни простейших тригонометрических уравнений чаще записывают двумя формулами, а не одной. Так запись ответа более наглядна – и поэтому меньше вероятность ошибки.

Если же корни уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ записать иначе: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; где $n \in \mathbb{Z}$,

то ответ мог выглядеть так:

$$\left((-1)^n \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} - (-1)^n \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Если систему двух тригонометрических уравнений удастся свести к виду, содержащему только две тригонометрические функции, то можно попробовать применить метод замены неизвестных, получив алгебраическую систему.

Пример 2. Решите систему:

$$\begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение. Пусть $\sin x = a$, $\cos y = b$.

Получим алгебраическую систему:

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ a^2 + b^2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решив её с помощью подстановки $b = 1 - a$, убедимся, что $a = b = \frac{1}{2}$.

Получили, что исходная система равносильна системе двух уравнений:

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ и } \cos y = \frac{1}{2}.$$

Решения этих уравнений:

$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \text{ где } k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right), \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right), \text{ где } k, n \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что при решении каждого из уравнений, входящих в систему, мы использовали разные буквы для обозначений целочисленных переменных (k и n), поскольку эти уравнения независимы друг от друга. Обозначение этих переменных одной и той же буквой привело бы к потере решений.

При решении тригонометрических систем используют также метод алгебраического сложения.

Пример 3. Решите систему:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{2}, \\ \cos x \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение. Последовательно сложим и вычтем уравнения системы. Получим:

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = 1, \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = 0. \end{cases}$$

Применим формулы «синус суммы» и «синус разности»:

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 1, \\ \sin(x - y) = 0. \end{cases}$$

Перейдем к алгебраической системе (где $n, k \in Z$):

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x - y = \pi n. \end{cases}$$

Сложим полученные уравнения. Получим:

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi(2k + n), \text{ откуда } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi(2k + n)}{2}.$$

Затем вычтем из первого уравнение второе:

$$2y = \frac{\pi}{2} + \pi(2k - n), \text{ откуда } y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi(2k - n)}{2}.$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi(2k + n)}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi(2k - n)}{2} \right)$, где $n, k \in Z$.

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

- а) Что называют решением системы тригонометрических уравнений с двумя неизвестными?
- б) Что значит решить систему тригонометрических уравнений?
- в) Какие основные методы решения систем уравнений Вы знаете?

2 Решите систему уравнений.

а) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = 2, \\ x + y = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{4} - y\right) = 1, \\ x + y = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2}, \\ x + y = \frac{3\pi}{2}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2 \sin x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + y\right) = 1, \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

3 Решите систему уравнений.

$$\text{a) } \begin{cases} \cos(x+2y) = \frac{1}{2}, \\ x+y = \frac{\pi}{4}; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \operatorname{tg}(x-2y) = \sqrt{3}, \\ x+y = \frac{\pi}{4}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sin(2x-y) = -\frac{1}{2}, \\ x-y = \frac{\pi}{4}; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} \operatorname{ctg}(2x+y) = \sqrt{3}, \\ x-y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

4 Решите систему.

$$\text{a) } \begin{cases} 2\sin x + 3y = 5, \\ 3\sin x - 2y = 1; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 3y + \operatorname{tg} x = 1, \\ 2y - \operatorname{tg} x = 4; \end{cases}$$
$$\text{б) } \begin{cases} x + \sin(x+y) = 0, \\ 3x - \sin(x+y) = 0; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 3y + 2\operatorname{ctg}(x-y) = 8, \\ 2y - \operatorname{ctg}(x-y) = 3. \end{cases}$$

5 Решите систему:

$$\text{a) } \begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(x-y) = 0; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \sin(x-y) = -1; \end{cases}$$
$$\text{б) } \begin{cases} \cos(x+y) = 1, \\ \cos(x-y) = 1; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 2\cos(x+y) = 1, \\ \cos(x-y) = 0. \end{cases}$$

6 Решите систему:

$$\text{a) } \begin{cases} \sin x - \cos y = 1, \\ \sin x + \cos y = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \cos x + \sin y = \frac{1}{2}, \\ \cos x - \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

7 Решите систему:

$$\text{a) } \begin{cases} \sin x + 2\cos y = 1, \\ 2\sin x + \cos y = -1; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \sin x + 2\sin y = 2, \\ 3\sin x - 4\sin y = 1; \end{cases}$$
$$\text{б) } \begin{cases} \sin x + \cos y = 1, \\ 3\sin x - 2\cos y = 0,5; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 4\cos x - \cos y = 3, \\ 2\cos x - 5\cos y = 6. \end{cases}$$

8 Решите систему:

$$\text{a) } \begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ 2\sin^2 x + 2\cos^2 y = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sin^2 x - \sin^2 y = 0, \\ \sin x + \cos y = 1. \end{cases}$$

П

9) Решите систему уравнений:

$$\text{a) } \begin{cases} 4\cos^2 x - 12\cos y + 3 = 0, \\ x - y = \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \cos 2x + 5\cos y = 3, \\ x - y = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ x + y = \frac{\pi}{3}; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} \cos x + \cos y = \sqrt{3}, \\ x + y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

10) Решите систему:

$$\text{a) } \begin{cases} \sin x = \sin x \cdot \cos y, \\ \cos x + \sin y = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \sin 2x \cdot \cos y = \sin x, \\ \frac{\cos x}{\sin y} = 1. \end{cases}$$

М

11) Решите систему уравнений.

$$\text{a) } \begin{cases} 4\sin x \cdot \sin y = 1, \\ 4\cos x \cdot \cos y = 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4\sin x \cdot \sin y = 1, \\ \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y = 3. \end{cases}$$

12) Решите систему уравнений.

$$\text{a) } \begin{cases} 5\sin x = \sin y, \\ 3\cos x + \cos y = 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2\sin^3 x = \sin y, \\ 2\cos^3 x = \cos y. \end{cases}$$

13) Решите уравнение.

$$\text{a) } \cos x + \cos y = 2; \quad \text{б) } (\sin x + \cos y)^2 + (2\cos x - 1)^2 = 0.$$

2.7*. Решение тригонометрических уравнений: использование ограниченности

Наиболее характерное свойство тригонометрических функций – это периодичность. Именно в силу периодичности многие тригонометрические уравнения имеют бесконечное количество корней.

Другое важное свойство, часто используемое при решении тригонометрических уравнений – свойство ограниченности синуса и косинуса.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решите уравнение

$$\cos \sqrt{3}x + \cos x = 2.$$

Решение. Т.к. $\cos \sqrt{3}x \leq 1$, $\cos x \leq 1$, то данное равенство может выполняться, только если одновременно выполняются условия $\cos \sqrt{3}x = 1$ и $\cos x = 1$, то есть полученные уравнения образуют систему.

Решим каждое уравнение в отдельности.

1) $\cos \sqrt{3}x = 1$, тогда $\sqrt{3}x = 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos x = 1$, тогда $x = 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что $x = 0$ корень каждого из уравнений, а, следовательно, является решением системы. Докажем что других решений нет.

Действительно, пусть x – решение, тогда одновременно при некоторых целых n и k выполнены равенства $\sqrt{3}x = 2\pi n$ и $x = 2\pi k$.

Разделим первое равенство на второе:

$$\frac{\sqrt{3}x}{x} = \frac{2\pi n}{2\pi k}, \text{ тогда } \sqrt{3} = \frac{n}{k}.$$

Получено противоречие, так как число $\sqrt{3}$ иррациональное и не может равняться дроби, где числитель и знаменатель – целые числа. Следовательно, исходное уравнение имеет единственное решение.

Ответ: 0.

Особенность предыдущего тригонометрического уравнения состоит в том, что оно имеет единственный корень. Такие тригонометрические уравнения нам до этого не встречались.

Пример 2. Решите уравнение

$$\sin 3x + \cos 2x = -2.$$

Решение. Так как $\sin 3x \geq -1$, $\cos 2x \geq -1$, то данное равенство может выполняться, если одновременно выполняются условия $\sin 3x = -1$ и $\cos 2x = -1$, то есть исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \cos 2x = -1 \end{cases}$$

Решим каждое уравнение в отдельности.

1) $\sin 3x = -1$, тогда $3x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\cos 2x = -1$, тогда $2x = -\pi + 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Необходимо отобрать общие корни уравнений.

Отбор решений системы осуществим с помощью тригонометрического круга.

Синие точки соответствуют решениям вида $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, красные – решениям вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n, k \in \mathbb{Z}$. Общее решение: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

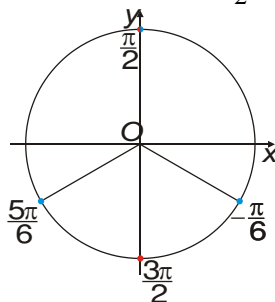


Рис. 2.12

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. Решите уравнение

$$\sin 3x \cdot \sin x = -1.$$

Решение. Воспользовавшись формулой $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$, преобразуем уравнение к виду:

$$\cos 2x - \cos 4x = -2.$$

Далее рассуждаем аналогично предыдущему примеру.

Так как $\cos 2x \geq -1$, $-\cos 4x \geq -1$, то данное равенство может выполняться, если одновременно $\cos 2x = -1$ и $\cos 4x = 1$, то есть полученные уравнения образуют систему:

$$\begin{cases} \cos 2x = -1, \\ \cos 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = -1, \\ 2 \cos^2 2x - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2x = -1.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

По ходу решения мы заметили, что если

$$\cos 2x = -1, \text{ то } 2 \cos^2 2x - 1 = 1 \text{ и } \cos 4x = 1.$$

Тем самым нам удалось избежать отбора корней на тригонометрическом круге, упростив решение.

Рассмотрим более сложный пример.

Пример 4. Решите уравнение

$$(\cos x + \cos 2x)^2 = 4 + \sin^2 4x.$$

Решение. Заметим, что $\cos x + \cos 2x \leq 2$, следовательно, $(\cos x + \cos 2x)^2 \leq 4$.

С другой стороны $4 + \sin^2 4x \geq 4$.

Получили, что левая часть уравнения не больше 4, а правая часть – не меньше 4. Следовательно, равенство возможно, только если одновременно и левая и правая части уравнения равны 4. Таким образом:

$$(\cos x + \cos 2x)^2 = 4 + \sin^2 4x \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x + \cos 2x)^2 = 4, \\ 4 + \sin^2 4x = 4 \end{cases}$$

То есть данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} |\cos x + \cos 2x| = 2, \\ \sin 4x = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) $\cos x + \cos 2x = 2$.

Рассуждая аналогично примеру 1, получим, что последнее уравнение равносильно системе уравнений $\cos x = 1$ и $\cos 2x = 1$, тогда:

$$\begin{cases} \cos x + \cos 2x = 2, \\ \sin 4x = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \cos x = 1, \\ 2 \cos^2 x - 1 = 1, \\ \sin 4x = 0 \end{cases}$$

Если $\cos x = 1$, то $2 \cos^2 x - 1 = 1$. Кроме того, в этом случае $\sin x = 0$ и, следовательно, $\sin 4x = 4 \sin x \cos x \cos 2x = 0$.

Таким образом:

$$\begin{cases} \cos x + \cos 2x = 2, \\ \sin 4x = 0 \end{cases}, \text{ откуда } \cos x = 1 \text{ и } x = 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

2) $\cos x + \cos 2x = -2$.

Последнее уравнение равносильно системе уравнений $\cos x = -1$ и $\cos 2x = -1$, которая решений не имеет.

Действительно, если $\cos x = -1$, то $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1$.

Ответ: $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

а) Каким образом свойство ограниченности тригонометрических функций используется при решении уравнений?

б) Всегда ли тригонометрическое уравнение имеет бесконечное количество решений?

2 Решите уравнение.

а) $\sin^2 2x + \sin^2 3x = 0$;

в) $(\sin x + 1)^2 + \sin^2 2x = 0$;

б) $\cos^2 x + \cos^2 3x = 0$;

г) $(\cos x + 1)^2 + \cos^2 2x = 0$.

3 Решите уравнение.

а) $\cos x + \cos 5x = 2$;

в) $\cos 2x + 4 \cos 8x = 5$;

б) $\sin 2x + \sin 8x = 2$;

г) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = -3$.

4 Решите уравнение.

а) $\cos x \cdot \cos 3x = 1$;

в) $\sin x \cdot \sin 3x = -1$;

б) $\cos 3x \cdot \sin 5x = 1$;

г) $\cos x \cdot \cos 4x \cdot \cos 5x = 1$.

5 Докажите, что данные уравнения корней не имеют.

а) $2 \sin x + 3 \cos x = 5$;

в) $\sin x + \cos x = \sqrt{3}$;

б) $7 \cos^{10} x + 3 \sin^4 x = 10$;

г) $\sin^2 x + 2 \sin x = \pi$.

П

6 Решите уравнение.

а) $\sin^4 2x + 1 = \cos^2 3x$;

б) $\cos x + \cos 5x = 2 + \sin^2 x$;

7 Решите систему уравнений.

а)
$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 2, \\ x - y = 2\pi \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 3 \sin 3x + \cos y = -4, \\ x + y = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

8 Решите уравнение.

а) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$;

в) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$;

б) $\sin^3 x - \cos^3 x = 1$;

г) $\sin^{20} x + \cos^7 x = 1$.

M

9 Решите уравнение.

а) $\cos x = 1 + x^2$;

в) $x^2 - 2x \cos \pi x + 1 = 0$;

б) $\sin x = 1 + x^2$;

г) $x^2 - 2x \sin \frac{\pi x}{2} + 1 = 0$.

10 Решите уравнение.

а) $\sin x \cdot \sin \sqrt{2}x = 1$;

б) $\sin^2 x + x^2(1 + \cos x)^2 = 0$.

11 Решите уравнение.

а) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$;

б) $1 + \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

12 Решите уравнение $x^2 + 4x \cos xy + 4 = 0$.

13 Решите уравнение.

а) $\sin^5 x + \cos^5 x + \sin^4 x = 2$;

б) $\sin x - \sin 15x \cos x = 1,5$.

14 Докажите, что если число a/b – иррационально, то уравнение $\cos ax + \cos bx = 2$ не имеет корней.

ГЛАВА III

Многочлены

3.1. Многочлены от одной переменной: основные определения

Продолжим изучение многочленов, начатое в курсе алгебры 7 класса.

Как известно, *многочленом* принято называть сумму одночленов. Эта сумма может быть «суммой» одного слагаемого, то есть одночлен – это тоже многочлен.

В курсе алгебры 7–9 классов вы узнали, как складывать, вычитать, умножать многочлены от одной или нескольких переменных, приводить их к стандартному виду, раскладывать на множители, познакомились с важным частным случаем многочлена от одной переменной – квадратным трёхчленом.

В этой главе мы продолжим изучение многочленов от одной переменной.

Напомним и уточним некоторые определения.

В седьмом классе мы говорили, что многочлен записан в стандартном виде, если все его члены имеют стандартный вид, и среди них нет подобных. Получалось, что тождественно равные многочлены, могут быть записаны в стандартном виде различными способами.

Так многочлен $-2x^2 + 1$, представляющий собой сумму двух одночленов стандартного вида, можно записать в стандартном виде иначе: $1 - 2x^2$. Многочлен $1 - x + x^3$ (сумму трёх одночленов), можно записать в стандартном виде ещё пятью способами: $1 + x^3 - x$, $-x + 1 + x^3$, $-x + x^3 + 1$, $x^3 - x + 1$, $x^3 + 1 - x$.

Такое разнообразие форм записи не всегда удобно.

Поэтому, в дальнейшем будем говорить, что многочлен от одной переменной записан в *стандартном виде*, если в нём приведены подобные слагаемые, все одночлены, из которых он составлен, имеют стандартный вид и расположены в порядке убывания степеней.

Одночлены, из которых составлен многочлен, называют *членами* многочлена.

Степенью многочлена называют наибольшую из степеней его членов.

Если многочлен от одной переменной записан в стандартном виде, то его степень равна степени старшего члена.

Стандартный вид многочлена от одной переменной:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ где}$$

x – переменная, n – целое неотрицательное число, $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ – некоторые действительные числа (коэффициенты многочлена), причём $a_n \neq 0$.

Пример 1. Многочлен $4x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ – многочленом стандартного вида степени 3, его коэффициенты: 4, 2, 3 и 5.

Пример 2. Многочлен стандартного вида $x^3 - 2x^2 + 0x + 2$, степень которого равна 3, а коэффициенты: 1, -2, 0 и 2, принято записывать короче $x^3 - 2x^2 + 2$.

Пример 3. Многочлен $-4x^2 + 5x^4 - 7$ не является многочленом стандартного вида, так как его члены не расположены в порядке убывания степеней.

Напомним, что действительные числа, отличные от нуля, можно рассматривать как многочлены от одной переменной (степени 0).

Пример 4. Многочлены $f(x) = 5$, $g(z) = -1$, $p(y) = \sqrt{2}$ – многочлены от одной переменной (соответственно от x , z и y) степени 0.

Для нулевого многочлена, т.е. числа 0, понятие степени не определено.

Если в многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ вместо переменной x подставить некоторое число c , он обращается в числовое выражение. Число, которое получается после упрощения этого числового выражения называют *значением* многочлена $f(x)$ при $x = c$ и обозначают $f(c)$.

Значение многочлена $f(x)$ при $x = c$ это число

$$f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0.$$

Пример 5. Найдите значение многочлена $g(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ при $x = 2$.

Решение. Подставим вместо переменной x в многочлен $g(x)$ число 2. Получим:

$$g(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 - 1 = 15.$$

Ответ: 15.

Значением многочлена нулевой степени $f(x) = a_0$, где a_0 – некоторое число, отличное от нуля, при любом x является число a_0 .

Пример 6. Значение многочлена $p(x) = 5$ при любом x равно 5.

То есть, $p(2) = 5$, $p(-102) = 5$, $p(-1) = 5$.

Аналогичное утверждение верно и для нулевого многочлена.

Число b называют *корнем* многочлена $f(x)$, если значение многочлена $f(x)$ при $x = b$ равно нулю, т.е. $f(b) = 0$.

Пример 3. Убедитесь, что число -1 является корнем многочлена

$$p(x) = x^5 + x^2 + x + 1.$$

Решение. Найдем значение многочлена $p(x)$ при $x = -1$.

Подставим вместо переменной x в многочлен $p(x)$ число -1.

Получим: $p(x) = (-1)^5 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$.

H

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

- Что называют стандартным видом многочлена с одной переменной?
- Что называют значением многочлена с одной переменной?
- Что называют корнем многочлена с одной переменной?

2 Укажите степень, свободный член и старший коэффициент многочлена, получившегося после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых.

- а) $(x^3 - 1) \cdot (x^2 + 3)$; в) $(3x^4 - x + 1) \cdot (x^2 - 3x)$;
б) $(x^2 - x + 1) \cdot (2x^2 + x - 4)$; г) $(-x + 8) \cdot (-2x^2 + 1)$.

3 В данных выражениях раскрыли скобки и представили получившиеся многочлены в стандартном виде. Определите, чему равен коэффициент при x^p .

- а) $(x^2 + x - 4)(x - 1)$, $p = 0$, $p = 1$; в) $(x^2 + 3x + 1) \cdot (x^2 - 2x)$, $p = 2$, $p = 3$;
б) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$, $p = 1$, $p = 2$; г) $(-x^3 - x) \cdot (x^2 + x + 1)$, $p = 3$, $p = 4$.

4 Выполните действия. Ответ запишите в виде многочлена стандартного вида.

- а) $(x^2 - 1) \cdot (x^2 + x)$; в) $(3x - 1) \cdot 3x^3 - (x^2 - x)(x + 1)$;
б) $(2x + 1) \cdot (3x + 1) - (x^2 - x)$; г) $(x - 2) \cdot (x^2 - 1) + (2x - 5)(x^4 + 1)$.

5 Проверьте, являются ли данные числа корнями многочленов.

- а) $4x^4 - x^2 + x - 1$, числа: 1, -1 и 0,5;
 б) $2x^3 + x^2 - x - 1$, числа: 2, -1 и 0,5;
 в) $-9x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, числа: 1, -1 и $\frac{1}{3}$;
 г) $4x^3 + x + 5$, числа: 2, -1 и 0,5.

6 Найдите значение многочлена при $x = a$.

- а) $f(x) = x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 5x - 2$, $a = 1$;
 б) $g(x) = 3x^7 + 5x^3 - x^2 + 4x + 1$, $a = -1$;
 в) $p(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x + 7$, $a = 2$;
 г) $s(x) = x^6 + 2x^5 + x^3$, $a = -2$.

7 Разложите многочлен на множители.

- а) $x^2 - 4x + 3$; в) $2x^2 - 3x - 2$;
б) $x^3 - 2x^2 + x$; г) $x^3 - 2x^2 - x + 2$.

П

8 При каких значениях a и b данное выражение равно многочлену $f(x)$?

- а) $(x-a)(x-b)$, $f(x) = x^2 - 4x$;
 б) $(2x-a)(x-b)$, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$;
 в) $(x^2-a)(x-b)$, $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$;
 г) $(x^2-a)(x^2-b)$, $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$.

9 Разложите многочлен на множители.

- а) $x^3 - 2x - 1$; в) $x^4 + x^2 + 1$;
 б) $x^3 + 3x - 4$; г) $x^4 + 4$.

10 Докажите, что многочлен не имеет отрицательных корней.

- а) $x^5 - x^4 + x - 6 = 0$; б) $x^4 - x + 1 = 0$.

М

11 В выражении $(2x^2 - 2x + 1)^{179} + (3x^2 - 3x + 1)^{2007}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Найдите сумму коэффициентов получившегося многочлена.

12 Верно ли, что при всех натуральных n данные числа являются составными?

- а) $n^4 + 4$; в) $n^4 - n^2 + 2n - 1$;
 б) $n^4 + 3n^2 + 4$; г) $n^4 + 2n^2 + 2n - 1$.

13 Разложите многочлен на множители.

- а) $x^4 + 1$; б) $x^5 + x + 1$.

14 Докажите, что многочлен, все коэффициенты которого положительны, не может иметь положительных корней.

3.2. Разложение на множители двучленов $a^n + b^n$ и $a^n - b^n$. Бином Ньютона

Среди формул сокращённого умножения нам встречались две похожие формулы:
 $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ и $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Попробуем обобщить их на случай $a^n - b^n$.

Вспомним формулу суммы геометрической прогрессии:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}.$$

Выражение $x^n - 1$ в этой формуле напоминает нам $a^n - b^n$.

Перепишем формулу в виде:

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1).$$

Это очень похоже на то, что нам нужно.

Выполним подстановку: $x = \frac{a}{b}$.

Получим:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1 = \left(\frac{a}{b} - 1\right) \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} + \dots + \frac{a}{b} + 1 \right).$$

Умножим обе части на b^n . Получим:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Подумаем, можно ли обобщить формулу $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Попытаемся вывести формулу разложения на множители двучлена $a^n + b^n$.

Примем во внимание, что формулы для разложения на множители двучлена $a^2 + b^2$ не существует. Возможно, это означает, что искомая формула существует только для нечётных значений n .

Возьмём в качестве знаменателя геометрической прогрессии $(-x)$.

Получим:

$$1 + (-x) + (-x)^2 + \dots + (-x)^{n-1} = \frac{(-x)^n - 1}{(-x) - 1}.$$

При нечётном значении n получим:

$$1 - x + x^2 - \dots + x^{n-1} = \frac{x^n + 1}{x + 1}.$$

В числителе дроби стоит выражение $x^n + 1$, напоминающее $a^n + b^n$:

Перепишем формулу в виде:

$$x^n + 1 = (x + 1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1).$$

Выполним подстановку: $x = \frac{a}{b}$. Получим:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + 1 = \left(\frac{a}{b} + 1\right) \left(\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} - \left(\frac{a}{b}\right)^{n-2} + \dots + \frac{a}{b} - 1 \right).$$

Умножим обе части на b^n .

Наконец, $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$.

Итак, мы доказали формулы, с помощью которых можно раскладывать на множители двучлены вида $a^n \pm b^n$.

1. $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, где $n \in \mathbb{N}$
2. $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, где $n \in \mathbb{N}$ и n – нечётно

Интересно, что отсутствие формулы разложения на множители $a^n + b^n$ при чётном n вовсе не означает, что этот двучлен нельзя разложить на множители ни при каком чётном n . Как мы убедимся в дальнейшем, это означает, что среди множителей, на которые можно разложить $a^n + b^n$, при $n > 2$ нет линейных множителей.

Пример 1. Разложите на множители многочлен $a^4 + b^4$.

Решение. Воспользуемся формулой разности квадратов:

$$a^4 + b^4 = (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) - 2a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (\sqrt{2}ab)^2$$

Ответ: $(a^2 + \sqrt{2}ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2)$.

Попробуем обобщить формулы

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Как и раньше, немного облегчим себе задачу. Выведем формулу для n -ой степени двучлена $(1+x)^n$, который представляет собой произведение n скобок $(1+x)$:

$$(1+x)^n = (1+x) \cdot (1+x) \cdot \dots \cdot (1+x).$$

Если скобки в правой части раскрыть, то получится многочлен степени n , состоящий из 2^n слагаемых (подумайте, почему), причём коэффициент при каждом слагаемом будет равен 1.

После приведения подобных слагаемых получится многочлен, в котором коэффициент при x^k будет равен числу вхождений x^k в многочлен, в котором подобные слагаемые ещё не приведены.

Выясним, сколько раз войдёт слагаемое x^k в первоначальный многочлен. Каждое слагаемое в нём представляет собой произведение n множителей взятых по одному из каждой скобки. То есть, чтобы получить слагаемое x^k нужно из k скобок взять x , а из остальных $n - k$ скобок взять 1.

Известно, что k объектов из n можно выбрать C_n^k способами, где $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$. Таким образом, раскрыв скобки, мы получим C_n^k слагаемых x^k .

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + \dots + C_n^kx^k + \dots + C_n^{n-1}x^{n-1} + C_n^nx^n.$$

Заметим, что 1 (как и x^n) войдёт в первоначальный многочлен один раз, а что x (как и x^{n-1}) – ровно n раз, что хорошо согласуется с равенствами:

$$C_n^0 = C_n^n = \frac{n!}{(n)! \cdot 0!} = 1, \quad C_n^1 = C_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = n.$$

Подставим в полученную формулу $x = \frac{b}{a}$.

Получим:

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = C_n^0 + C_n^1 \left(\frac{b}{a}\right) + \dots + C_n^k \left(\frac{b}{a}\right)^k + \dots + C_n^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} + C_n^n \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Умножим обе части на a^n . Получим:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Полученную формулу обычно называют формулой бинома Ньютона, а коэффициенты C_n^k – биномиальными коэффициентами.

Запишем формулу бинома Ньютона в следующем виде.

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + nab^{n-1} + b^n,$$

$$\text{где } n \in \mathbb{N} \text{ и } C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Для вычисления биномиальных коэффициентов бывает удобно использовать треугольник Паскаля, который устроен следующим образом.

В его нулевой строке записана 1, в первой строке – две 1, во второй строке числа 1, 2 и 1, причём в каждой следующей строке, по краям стоят 1, а каждое число из остальных, равно сумме двух чисел предыдущей строки, записанных над ним в предыдущей строке – несколько левей и несколько правее (см. таблицу ниже).

В треугольнике Паскаля каждая n -ая строка содержит все биномиальные коэффициенты разложения $(a+b)^n$.

Чтобы в этом убедиться, составим аналогичный числовой треугольник из биномиальных коэффициентов, причём число C_n^k поставим на $k+1$ место слева в строке n .

Тогда числа из первых строк обоих треугольников будут соответственно равны, а числа C_n^k и C_n^{k+1} будут стоять в строке n над числом C_{n+1}^{k+1} , стоящим в строке $n+1$. Останется доказать формулу $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Треугольник Паскаля (треугольник биномиальных коэффициентов)									
Номер строки									
0	1								
1	1				1				
2	1			$C_2^1 = 2$	1				
3	1		$C_3^1 = 3$	$C_3^2 = 3$	1				
4	1	$C_4^1 = 4$	$C_4^2 = 6$	$C_4^3 = 4$	1				
5	1	$C_5^1 = 5$	$C_5^2 = 10$	$C_5^3 = 10$	$C_5^4 = 5$	1			
6	1	$C_6^1 = 6$	$C_6^2 = 15$	$C_6^3 = 20$	$C_6^4 = 15$	$C_6^5 = 6$	1		
...				...	...				
n				C_n^k	C_n^{k+1}				
$n+1$				...	C_{n+1}^{k+1}				
...									

Решение. Биномиальные коэффициенты возьмём из четвертой строки треугольника Паскаля: 1, 4, 6, 4, 1.

H

180

4 Раскройте скобки.

- а) $(a+b)^5$; в) $(a+b)^6$;
б) $(a-b)^5$; г) $(a-b)^6$.

5 Вычислите биномиальные коэффициенты.

- а) C_5^3 ; в) C_{14}^{14} ; д) C_6^5 ;
б) C_7^4 ; г) C_{21}^{19} ; е) C_{21}^2 .

П

6 Упростите выражение.

- а) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^4$; в) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4$;
б) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^4$; г) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^4$.

7 Раскройте скобки.

- а) $(2x+1)^3$; в) $(x^2+1)^4$;
б) $(3x-2)^4$; г) $(x^2-x)^5$.

8 Найдите коэффициенты многочленов при указанных степенях x .

- а) $(x+2)^{10}$ при x^3 ; б) $(3x-2)^4$ при x^2 .

М

9 Докажите, что число $11^{10}-1$ кратно 10. Кратно ли оно 100?

10 Определите степень бинома $(3a-2)^n$, если коэффициент при a^2 равен 216.

11 В разложении $\left(a + \frac{1}{a}\right)^{12}$ найдите коэффициент при a^8 .

12 В разложении $\left(2a - \frac{1}{3a}\right)^{10}$ найдите коэффициент при a^4 .

13 Вычислите сумму: $C_{10}^1 + C_{10}^2 + \dots + C_{10}^{10}$. Обобщите полученный результат.

14 Докажите, что двучлен $a^{2n} + b^{2n}$ невозможно разложить на множители одним из которых будет $a+b$ или $a-b$.

3.3. Операции с многочленами: деление с остатком

Продолжим изучение многочленов от одной переменной.

Как нам уже известно, такие многочлены можно складывать, вычитать и умножать.

Это означает, что из двух произвольных многочленов $f(x)$ и $g(x)$ можно получить многочлен-сумму $f(x) + g(x)$, многочлен-разность $f(x) - g(x)$ и многочлен-произведение $f(x) \cdot g(x)$. Если записывать результаты операций над многочленами в стандартном виде – получается вполне определённый однозначный ответ.

Пример 1. Найдите сумму, разность, произведение многочленов $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ и $g(x) = 2x^2 - x + 1$.

Решение. 1) Сумма: $f(x) + g(x) = (x^3 - x^2 + 1) + (2x^2 - x + 1) = x^3 + x^2 - x + 2$;

2) Разность: $f(x) - g(x) = (x^3 - x^2 + 1) - (2x^2 - x + 1) = x^3 - x^2 + 1 - 2x^2 + x - 1 = x^3 - 3x^2 + x$;

3) Произведение: $f(x) \cdot g(x) = (x^3 - x^2 + 1) \cdot (2x^2 - x + 1) = 2x^5 - 2x^4 + 2x^2 - x^4 + x^3 - x + x^3 - x^2 + 1 = 2x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 1$.

С делением многочленов дело обстоит сложнее. Попробуем в этом разобраться. Выясним сначала, что означает разделить многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$ и получить при этом некоторый многочлен $p(x)$?

Можно предположить (по аналогии с целыми числами), что деление – действие, обратное умножению: $f(x) : g(x) = p(x)$ означает, что $f(x) = p(x) \cdot g(x)$.

Точнее:

Разделить многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$ означает, найти такой многочлен $p(x)$, что

$$f(x) = g(x) \cdot p(x),$$

где $f(x)$ – делимое, $g(x)$ – делитель, $p(x)$ – частное.

С такой ситуацией мы уже встречались.

Пример 2. Убедитесь, что если многочлен $x^4 + 4$ разделить на многочлен $x^2 + 2x + 2$, получится $x^2 - 2x + 2$ (многочлен-частное).

Решение. Для этого достаточно проверить равенство:

$$x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2).$$

Но разделить многочлен на многочлен удаётся не всегда.

Пример 3. Попробуем разделить многочлен $x^4 + x + 4$ на многочлен $x^2 + 2x + 2$.

Предположим, нам это удалось, то есть мы нашли многочлен $p(x)$, такой что $x^4 + x + 4 = (x^2 + 2x + 2) \cdot p(x)$, причём понятно, что $p(x)$ – многочлен степени 2.

С учетом примера 2 одновременно выполняются равенства:

$$x^4 + x + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) + x \text{ и } x^4 + x + 4 = (x^2 + 2x + 2) \cdot p(x).$$

Следовательно:

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x + 2) \cdot p(x) &= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) + x, \\ (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2 - p(x)) &= -x.\end{aligned}$$

Последнее равенство невозможно. Ведь степень многочлена в правой части равна 1, а так как многочлен $x^2 - 2x + 2 - p(x)$ не может быть нулевым многочленом, то степень многочлена, который получится после раскрытия скобок в левой части не меньше 2.

Так как деление многочленов «нацело» возможно не всегда, приходится (по аналогии с целыми числами) вводить операцию деления с остатком.

Разделить многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$ с остатком, значит найти многочлены $p(x)$ и $q(x)$ такие, что

$$f(x) = g(x) \cdot p(x) + q(x),$$

причём степень многочлена $g(x)$ больше степени многочлена $q(x)$.

Многочлен $f(x)$ принято называть *делимым*, $g(x)$ – *делителем*, $p(x)$ – *частным* (неполным), а $q(x)$ – *остатком*.

Понятно, что многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$ «нацело», тогда и только тогда когда остаток от деления многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ равен нулевому многочлену.

Пример 4. $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 2x - 1) + (-x + 6).$

В данном случае:

$$f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5 \text{ – делимое, } g(x) = x^2 + x + 1 \text{ – делитель.}$$

$$p(x) = x^2 + 2x - 1 \text{ – частное (неполное), } q(x) = -x + 6 \text{ – остаток.}$$

Проверить, что данное равенство действительно представляет результат от деления с остатком многочлена $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5$ на $g(x) = x^2 + x + 1$ нетрудно, – достаточно в правой части равенства раскрыть скобки и привести подобные слагаемые. Но как можно было получить подобное равенство?

Для деления многочленов с остатком существует алгоритм «деления уголком», напоминающий алгоритм деления целых чисел.

Как это происходит?

Вначале подбираем старший член неполного частного: для этого старший член делимого делим на старший член делителя.

Получив старший член неполного частного, умножаем его на делитель и вычитаем полученное произведение из делимого.

Получив в результате вычитания многочлен меньшей степени, его старший член вновь делим на старший член делителя, получив тем самым следующий член неполного частного.

Затем, умножаем полученный член неполного частного на делитель и вычитаем, произведение из делимого. И так далее.

Продолжаем процесс до тех пор, пока степень разности не станет меньше степени делителя. Неполное частное найдено, а последняя разность является остатком.

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 0 \cdot x + 5 \mid x^2 + x + 5 \\
 - (x^4 + x^3 + x^2) \\
 \hline
 2x^3 + x^2 + 0 \cdot x \\
 - (2x^3 + 2x^2 + 2x) \\
 \hline
 -x^2 - 2x + 5 \\
 - (-x^2 - x - 1) \\
 \hline
 -x + 6
 \end{array}$$

Можно действовать несколько иначе.

Многочлен $x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5$ можно разделить на $x^2 + x + 1$, «выделяя» делитель постепенно.

$$f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5 = (x^2 + x + 1)x^2 + 2x^3 + x^2 + 5;$$

$$f(x) = (x^2 + x + 1)x^2 + (x^2 + x + 1) \cdot 2x - x^2 - 2x + 5;$$

$$f(x) = (x^2 + x + 1)x^2 + (x^2 + x + 1) \cdot 2x - (x^2 + x + 1) - x + 6;$$

$$f(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 + 2x - 1) + (-x + 6) - \text{ответ.}$$

Интересно, что уже в первой строке решения мы получили ответ задачи «похожий» на тот, что требуется; отличие полученного выражения от правильного в том, что степень «остатка» оказалась больше степени делителя.

С каждым дальнейшим шагом мы уменьшали степень «остатка» до тех пор, пока она не стала меньше степени делителя – как нам и требовалось.

С помощью операции деления с остатком можно (по аналогии с целыми числами) из отношения двух многочленов выделить «целую часть».

Пример 5. Представьте дробь как сумму многочлена и рациональной дроби, у которой степень числителя меньше степени знаменателя:

$$\frac{x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5}{x^2 + x + 1}.$$

Решение. Разбирая предыдущий пример, мы получили:

$$x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 5 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 2x - 1) + (-x + 6).$$

Разделим теперь обе части равенства на $x^2 + x + 1$.

Получим:

$$\frac{x^4+3x^3+2x^2+5}{x^2+x+1} = (x^2+2x-1) + \frac{-x+6}{x^2+x+1}.$$

Мы представили отношение двух многочленов в виде суммы многочлена и рациональной дроби, у которой степень числителя меньше степени знаменателя.

H

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

- а) Что значит разделить многочлен на многочлен?
б) Что значит разделить многочлен на многочлен с остатком?

2 Проверьте, что при делении многочлена $x^3 + 2x^2 + 3x + 2$ на многочлен $x^2 + x + 1$ в частном получается $x + 1$, а в остатке -1 .

3 Найдите делимое $f(x)$, если даны делитель $p(x)$, частное $g(x)$ и остаток $q(x)$.

- а) $p(x)=x-1$, $g(x)=x^2-3$, $q(x)=-2$;
б) $p(x)=x^2+3$, $g(x)=2x^2+x-3$, $q(x)=3x-5$;

4 Выполните деление с остатком.

- а) $2x^3 + 3x^2$ на $x + 1$; в) $x^2 - 1$, на $x^2 + 1$;
б) $x^3 - 5x^2 + 7x - 4$ на $x^2 - 3x + 1$; г) $8x^2 + 4x$ на x^3 .

5 Выделить целую часть из алгебраической дроби.

- $$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{x^2+1}{x+1}; & \text{b) } \frac{x^4+x^3+1}{x^2-1}; \\ \text{б) } \frac{x^3+x+1}{x-1}; & \text{r) } \frac{x^4+x+1}{x^2+x+1}. \end{array}$$

Π

6 Докажете или опровергните утверждения.

- а) Если каждый из многочленов $a(x)$ и $b(x)$ делится на многочлен $p(x)$, то сумма $a(x) + b(x)$ делится на многочлен $p(x)$
- б) Если каждый из многочленов $a(x)$ и $b(x)$ делится на многочлен $p(x)$, то произведение $a(x) \cdot b(x)$ делится на многочлен $(p(x))^2$.

7 Выясните, при каких целых n выражение является целым числом.

а) $\frac{3n+1}{n+2}$; в) $\frac{n^3-n^2}{n^2-1}$;

б) $\frac{2n^2+1}{n-1}$; г) $\frac{n^3}{n^2-3n}$.

8 Выполните деление с остатком.

а) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ на $x^2 + x + 1$;

б) $x^7 - 1$ на $x^3 - 1$.

М

9 Многочлен $f(x)$ при делении на двучлен $x-1$ дает остаток -1 , а при делении на $x+1$ дает остаток 3 . Найдите остаток $p(x)$ от деления $f(x)$ на x^2-1 .

10 Докажите или опровергните утверждения.

а) Если каждый из многочленов $a(x)$ и $b(x)$ не делится на многочлен $p(x)$, то сумма $a(x) + b(x)$ не делится на многочлен $p(x)$

б) Если каждый из многочленов $a(x)$ и $b(x)$ не делится на многочлен $p(x)$, то произведение $a(x) \cdot b(x)$ не делится на многочлен $p(x)$

11 При каких значениях a и b многочлен $p(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$ делится на многочлен $s(x) = x^2 - 3x + 4$?

3.4. Деление многочлена на линейный двучлен. Теорема Безу

Исследуем важный частный случай деления многочленов.

Именно, возьмём в качестве делимого произвольный многочлен $f(x)$, а в качестве делителя – линейный двучлен $x-a$.

Как известно, степень многочлена-остатка должна быть меньше, чем степень многочлена-делителя. Поэтому, остаток в случае деления на $x-a$ – многочлен нулевой степени (или даже нулевой многочлен), т.е. попросту говоря, некоторое число.

Результат деления многочлена $f(x)$ на $x-a$ можно записать в виде:

$$f(x) = (x-a) \cdot p(x) + q$$

Получили тождество, верное при любых значениях x .

1) Выполним подстановку $x = a$. Получим:

$$f(a) = (a - a) \cdot p(a) + q, \text{ откуда } q = f(a).$$

Таким образом, остаток от деления произвольного многочлена $f(x)$ на $x - a$ оказался равен значению многочлена $f(x)$ при $x = a$.

2) Если a – корень многочлена $f(x)$, то $f(x) = (x - a) \cdot p(x)$, и тогда $f(a) = 0$. Очевидно, верно и обратное утверждение: если $f(x) = (x - a) \cdot p(x)$, то a – корень многочлена $f(x)$.

Тем самым, мы доказали важную теорему, названную в честь французского математика XVIII века Этьена Безу.

Теорема Безу указывает на связь между разложением многочлена на множители и наличием корней: зная корень многочлена, мы можем представить его в виде произведения (разложить на множители), выделив соответствующий корню линейный множитель.

Этим мы не раз воспользуемся в дальнейшем.

Теорема Безу

1) Остаток q от деления многочлена $f(x)$ на линейный двучлен $x - a$, равен значению многочлена при $x = a$, то есть $q = f(a)$.

2) Многочлен $f(x)$ делится на линейный двучлен $x - a$ нацело тогда и только тогда, когда a – корень многочлена $f(x)$.

Интересно, что с помощью теоремы Безу можно найти остаток от деления многочлена $f(x)$ на линейный двучлен $x - a$, не выполняя собственно деления.

Пример 1. Найдите остаток от деления многочлена $x^{100} + x - 1$ на $x + 1$.

Решение. Понятно, что делить уголко было бы слишком долго.

Воспользуемся теоремой Безу: остаток от деления $f(x)$ на линейный двучлен $x - (-1)$ равен $f(-1) = (-1)^{100} + (-1) - 1 = -1$.

Ответ: -1 .

Из теоремы Безу следует важное утверждение: количество различных действительных корней многочлена от одной переменной не больше его степени.

Точнее:

Количество различных действительных корней многочлена $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ не может превышать n .

Докажем теорему методом от противного.

Предположим, многочлен $p(x)$ степени n имеет s различных корней $m_1, m_2, \dots, m_s$, где $s > n$.

1) Так как m_1 – корень многочлена, то из теоремы Безу следует, что

$$p(x) = (x - m_1)q_1(x), \text{ где } q_1(x) - \text{некоторый ненулевой многочлен.}$$

2) m_2 – корень многочлена, поэтому $p(m_2) = (m_2 - m_1)q_1(m_2) = 0$.

Так как $m_2 \neq m_1$, то $m_2 - m_1 \neq 0$ и $q_1(m_2) = 0$, и из теоремы Безу следует, что

$$q_1(x) = (x - m_2) \cdot q_2(x), \text{ где } q_2(x) - \text{некоторый ненулевой многочлен.}$$

Получим $p(x) = (x - m_1)(x - m_2) \cdot q_2(x)$.

3) Рассуждая аналогично, получим:

$$p(x) = (x - m_1) \cdot (x - m_2) \cdot \dots \cdot (x - m_s) \cdot q_s(x),$$

где $q_s(x)$ некоторый ненулевой многочлен.

Противоречие, так как степень левой части равна n , а степень правой части не меньше s , а $s > n$. Теорема доказана.

Н

1 а) Сформулируйте теорему Безу.

б) При каком условии многочлен $f(x)$ делится на двучлен $x - a$?

в) Сколько различных действительных корней может иметь многочлен $f(x)$, степень которого равна n ?

2 Найдите остаток от деления многочлена $f(x)$ на $g(x)$.

а) $f(x) = x^3 + x$ на $g(x) = x + 2$

б) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$ на $g(x) = x - 1$

в) $f(x) = 2x^4 + 9x + 1$ на $g(x) = x + 2$

г) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - x - 14$ на $g(x) = x - 2$

3 Выясните, делится ли данный многочлен на двучлен.

а) $x^3 + x^2 - 4x + 2$ на $x - 1$;

в) $4x^4 + 3x^2 - 2x - 1$ на $x + 1$;

б) $2x^3 - x^2 - 5x - 2$ на $x - 2$;

г) $7x^4 - 2x^2 - 5x - 2$ на $x + 2$.

4 Проверьте, является ли число a корнем уравнения.

а) $4x^3 - 10x + 4$, $a = 2$;

в) $4x^4 + 3x^2 - 2x - 1$, $a = -1$;

б) $-x^4 + 3x^3 - x^2 + 9$, $a = 3$;

г) $x^4 - 2x^2 - 5x - 5$, $a = -3$.

5 Найдите многочлен третьей степени $f(x)$ со старшим коэффициентом равным 1, корни которого равны 1, 2 и -2 , такой что $f(-3) = -20$.

$$a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0 = 0.$$

Перепишем равенство в виде:

$$-c \cdot (a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1) = a_0.$$

В скобках стоит целое число, следовательно, a_0 делится на c .

Пример 1. Найдите целые корни многочлена $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Решение. Выясним, есть ли у данного уравнения целые корни.

В соответствии с теоремой 1 их следует искать среди делителей свободного члена, чисел $\pm 1, \pm 2$.

Легко убедиться, что $1, -1$ и -2 – корни исходного уравнения.

Уравнение кубическое, три корня найдено, следовательно, других корней нет.

Ответ: $\pm 1, -2$.

Теорема 2. Если рациональное число c является корнем многочлена

$$p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$$

с целыми коэффициентами и $c = \frac{p}{q}$ – несократимая дробь, то a_0 делится на p , а

a_n делится на q .

Пусть $c = \frac{p}{q}$ – корень многочлена $p(x)$, тогда: $a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + \dots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$.

Умножим обе части этого равенства на q^n . Получим:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

1) Докажем, что a_0 делится на p .

Перепишем равенство в виде:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} = -a_0 q^n.$$

Число в левой части равенства кратно p , следовательно, и $-a_0 q^n$ кратно p , но p и q не имеют общих множителей, следовательно, a_0 делится на p .

2) Докажем, что a_n делится на q .

Перепишем равенство в виде:

$$-a_n p^n = a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n.$$

Число в правой части равенства кратно q , следовательно, и $-a_n p^n$ кратно q , но p и q не имеют общих множителей, следовательно, a_n делится на q .

Таким образом, теорема доказана.

Пример 3. Найдите рациональные корни многочлена:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 1.$$

Из теоремы 2 следует, что рациональные корни многочлена следует искать среди чисел $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$.

1) $x = \pm 1$, то $f(\pm 1) = 2(\pm 1)^3 - 5(\pm 1)^2 - (\pm 1) + 1$ – число нечетное, а, следовательно, значение многочлена нулю не равно.

$$2) x = \frac{1}{2}, \text{ тогда } f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} - \frac{1}{2} + 1 \neq 0;$$

$$3) x = -\frac{1}{2} \text{ тогда } f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 5\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -\frac{1}{4} - \frac{5}{4} + \frac{1}{2} + 1 = 0.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$.

В следующем примере теорема 2 применяется неожиданным образом.

Пример 4. Докажите, что число $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ – иррационально.

Пусть $a = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, тогда:

$$a^2 = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2, \quad a^2 = 5 - 2\sqrt{6}, \quad (2\sqrt{6})^2 = (5 - a^2)^2, \\ 24 = 25 - 10a^2 + a^4, \quad a^4 - 10a^2 + 1 = 0.$$

То есть $a = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ – корень многочлена $x^4 - 10x^2 + 1$. Но в соответствии с теоремой 2 у этого уравнения нет рациональных корней, так как единственные числа-кандидаты ± 1 корнями этого уравнения не являются.

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

- а) Как найти целые корни многочлена с целыми коэффициентами?
- б) Как найти рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами?
- в) Как найти рациональные корни многочлена с рациональными коэффициентами?

2 Проверьте, являются числа -1 ; 2 ; $\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{3}$ корнями следующих многочленов.

- а) $x^3 + 5x + 6$;
- б) $2x^4 - 6x + 7x - 1$.

3 Найдите целые корни многочлена.

- а) $x^3 + x^2 + x + 6$;
- в) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$;
- б) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$;
- г) $x^3 - 5x^2 - x + 21$.

4 Найдите рациональные корни многочлена.

а) $2x^3 + 3x^2 - 1$;

в) $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2$;

б) $4x^3 + 3x^2 + 3x - 1$;

г) $8x^3 - 6x^2 + 3x - 1$.

П

5 Докажите, что данные числа являются иррациональными.

а) $\sqrt{7}$;

б) $\sqrt{15}$;

в) $1 + \sqrt{3}$;

г) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

6 Докажите, что при нечётных a_0, a_1, a_2, a_3 и a_4 многочлен

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

не имеет целых корней.

7 Выясните, имеют ли данные многочлены целые корни.

а) $x^6 + 2x^2 + 18$;

б) $x^{20} + 4x^2 - 64$.

8 Найдите целые корни многочлена.

а) $x^3 + 3x^2 + 5x + 6$;

в) $x^3 - 3x^2 - 3x - 4$;

б) $x^3 - x^2 - 17x - 15$;

г) $x^3 + 3x^2 - 16x - 48$.

М

9 Докажите, что если все коэффициенты многочлена целые числа и старший коэффициент равен 1, то все рациональные корни этого многочлена – целые числа.

10 Выясните являются ли данные числа иррациональными.

а) $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} - \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$;

б) $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$.

11 Докажите, что многочлен $x^p + x^{p-1} + \dots + x + p = 0$, где p – простое число, не имеет рациональных корней.

12 Докажите, что многочлен с целыми коэффициентами, принимающий нечётные значения в точках $x = 0$ и $x = 1$, не имеет целых корней.

3.6. Нахождение значений многочленов: схема Горнера

Нахождение значений многочлена непосредственно подстановкой не представляет принципиальных проблем, но может быть чрезвычайно трудоёмко. Для упрощения вычислений разработаны различные методы. Один из них, назван в честь английского математика XIX века и называется схемой Горнера.

Получается она из следующих соображений (для примера возьмём многочлен степени 5). В общем случае обоснование проводится аналогично.

Как мы говорили, значение многочлена $f(x)$ при $x = c$ это число

$$f(c) = a_5c^5 + a_4c^4 + a_3c^3 + a_2c^2 + a_1c + a_0.$$

Вынесем c за скобки там, где это возможно. Получим:

$$f(c) = (a_5c^4 + a_4c^3 + a_3c^2 + a_2c + a_1) \cdot c + a_0$$

Затем сделаем эту процедуру еще три раза:

$$f(c) = ((a_5c^3 + a_4c^2 + a_3c + a_2) \cdot c + a_1) \cdot c + a_0$$

$$f(c) = (((a_5c^2 + a_4c + a_3) \cdot c + a_2) \cdot c + a_1) \cdot c + a_0$$

$$f(c) = ((((a_5c + a_4) \cdot c + a_3) \cdot c + a_2) \cdot c + a_1) \cdot c + a_0,$$

Значение $f(c)$ будем вычислять следующим образом.

Будем последовательно вычислять значения выражений в скобках. Они обозначены p_1, p_2, p_3, p_4 и p_5 . Вычислять будем последовательно:

$$1) p_1 = a_5c + a_4; 2) p_2 = p_1c + a_3; 3) p_3 = p_2c + a_2; 4) p_4 = p_3c + a_1.$$

И, наконец: $p_5 = p_4c + a_0 = f(c)$.

Выясним, в чём преимущество схемы Горнера по сравнению с вычислением значения многочлена по определению.

Если вычислять значение многочлена степени 5 по определению, то для получения результата придётся произвести 19 умножений и 5 сложений, а для получения результата по схеме Горнера требуется только 5 умножений и 5 сложений, что значительно менее трудоёмко.

Посмотрим, как это работает на примере.

Пример 1. Вычислите значение многочлена $4x^4 - 12x^2 + 4x - 9$ при $x = 3$.

Решение. Запишем в первую строку таблицы, коэффициенты многочлена, а слева от таблицы – значение x .

	4	0	- 12	4	- 9
$x = 3$	4				

На первом шаге старший коэффициент записывается во второй строке – слева.

Затем производятся однотипные операции – значение $x = 3$ умножаем на число, стоящее слева от заполняемой клетки и складывается с числом, стоящим над ней:

$$3 \cdot 4 + 0 = 12 \text{ – ставим полученное число в таблицу.}$$

	4	0	- 12	4	- 9
$x = 3$	4	12			

Затем вновь – значение $x = 3$ умножаем на число, стоящее слева от заполняемой клетки и складывается с числом, стоящим над ней:

$$3 \cdot 12 + (-12) = 24 \text{ – ставим полученное число в таблицу.}$$

$x = 3$	4	0	-12	4	-9
	4	12	24	76	219

Затем проделываем указанную операцию ещё дважды:

$$3 \cdot 24 + 4 = 76 \text{ – ставим полученное число в таблицу.}$$

$$3 \cdot 76 + (-9) = 219 \text{ – ставим полученное число в таблицу.}$$

Ответ: 219.

Кроме того, схема Горнера даёт возможность записать результат деления с остатком многочлена $f(x)$ на $x - c$.

Действительно, если p_1, p_2, p_3, p_4 – числа, полученные в результате вычислений по схеме Горнера с многочленов

$f(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ и $x - c$, то проверить являются ли они коэффициентами частного от деления можно, если раскрыть скобки в равенстве

$$f(x) = (x - c)(a_5x^4 + p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_4) + p_5,$$

привести подобные слагаемые и приравнять соответствующие коэффициенты.

Так, в результате деления с остатком многочлена $4x^4 - 12x^2 + 4x - 9$ на $x - 3$, получится:

$$4x^4 - 12x^2 + 4x - 9 = (x - 3)(4x^3 + 12x^2 + 36x + 112) + 327.$$

Схема Горнера особенно удобна, если требуется вычислить значения многочлена при нескольких значениях переменных.

Пример 2. Вычислите значения многочлена $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x - 7$ при следующих значениях переменной: $x = -1; 2; 4$.

Решение.

$x = -1$	3	-5	0	2	-7
	3	-8	8	-6	-1
$x = 2$	3	1	2	6	5
$x = 4$	3	7	28	114	449

Ответ: $f(-1) = -1$, $f(2) = 5$, $f(4) = 449$.

3.7. Примеры решения целых рациональных уравнений

Целым рациональным уравнением с одним неизвестным называют уравнение, представляющее собой равенство двух целых алгебраических выражений.

Решение таких уравнений обычно сводится к тождественным преобразованиям, при которых данное уравнение заменяют другим, более простым равносильным ему уравнением. Полученное уравнение заменяют другим и так действуют до тех пор, пока не получится уравнение, которое умеют решать.

Один из основных методов решения целых рациональных уравнений – разложение на множители.

Как известно, всякое целое рациональное уравнение с одним неизвестным с помощью тождественных преобразований можно представить в виде многочлена, равного нулю.

Таким образом, для решения целых рациональных уравнений полезно уметь раскладывать многочлены на множители.

Этим методом мы пользовались и раньше, раскладывая многочлены на множители, например, методом группировки.

Пример 1. Решите уравнение $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$.

Решение. Для этого разложим левую часть уравнения методом группировки.

Преобразуем исходное уравнение:

$$x^4 - 24x^2 + 144 - x^2 = 0, \quad (x^2 - 12)^2 - x^2 = 0, \\ (x^2 - x - 12)(x^2 + x - 12) = 0.$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю, а второй множитель определён.

Возможно два случая:

1) $x^2 - x - 12 = 0$, тогда $x_1 = -3$, $x_2 = 4$.

2) $x^2 + x - 12 = 0$, тогда $x_3 = 3$, $x_4 = -4$.

Ответ: ± 3 , ± 4 .

При решении следующих задач используем вновь изученные свойства многочленов.

Пример 2. Решите уравнение $x^3 + 4x^2 + 6x + 3 = 0$.

Решение. Из теорем предыдущего параграфа следует, что все рациональные корни данного уравнения – целые и являются делителями числа 3.

То есть, корни следует выбирать из чисел ± 1 , ± 3 .

Проверить, что -1 – корень можно подстановкой.

Нам теперь известно (теорема Безу), что многочлен $x^3 + 4x^2 + 6x + 3$ делится на двучлен $x + 1$.

Представим многочлен $x^3 + 4x^2 + 6x + 3$ в виде произведения.
Получим:

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 + 6x + 3 &= x^3 + x^2 + 3x^2 + 3x + 3x + 3 = \\ &= x^2(x+1) + 3x(x+1) + 3(x+1) = (x+1)(x^2 + 3x + 3). \end{aligned}$$

Исходное уравнение равносильно уравнению

$$(x+1)(x^2 + 3x + 3) = 0.$$

Квадратное уравнение $x^2 + 3x + 3 = 0$ корней не имеет.

Ответ: -1 .

Другой распространённый приём решения рациональных уравнений – замена неизвестного. Разберём несколько важных частных случаев.

Простая замена может быть использована при решении, так называемого биквадратного уравнения.

Пример 3. Решите уравнение $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$.

Решение. Пусть $y = x^2$, тогда x будет корнем данного уравнения, только в том случае, если y будет корнем квадратного уравнения $y^2 - 25y + 144 = 0$,

Решив квадратное уравнение, получим $y_1 = 9$, $y_2 = 16$.

Осталось решить уравнения $x^2 = 9$, $x^2 = 16$.

Ответ: ± 3 ; ± 4 .

Биквадратное уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$ можно решать заменой $y = x^2$

Пример 4. Решите уравнение $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$.

Решение. Это уравнение интересно тем, что его коэффициенты, равноотстоящие от крайних членов равны между собой. Такие уравнения называют *симметрическими* (или *возвратными*).

Заметим, что $x = 0$ не является корнем данного уравнения, поэтому исходное уравнение можно разделить на x^2 , получив равносильное уравнение:

$$x^2 + x - 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 4 = 0.$$

Пусть $y = x + \frac{1}{x}$, тогда $y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, $y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Получим уравнение: $y^2 + y - 6 = 0$, откуда $y_1 = 2$, $y_2 = -3$.

1) Решая уравнение $x + \frac{1}{x} = 2$, получим $x^2 - 2x + 1 = 0$, откуда $x_1 = 1$.

2) Решая уравнение $x + \frac{1}{x} = -3$, получим $x^2 + 3x + 1 = 0$ и $x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{8}}{2}$.

Ответ: $1; \frac{-3 \pm \sqrt{8}}{2}$.

Симметрическое (возвратное) уравнение 4-ой степени

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

можно решать подстановкой $y = x + \frac{1}{x}$.

На симметрические уравнения очень похожи кососимметрические уравнения.

Пример 5. Решите уравнение $x^4 - 3x^3 + 3x + 1 = 0$.

Решение. Это уравнение отличается от предыдущего тем, что коэффициенты при x^3 и x не равны, а противоположны. Тем не менее, уравнение может быть решено похожим методом.

Заметим, что $x = 0$ не является корнем данного уравнения, поэтому исходное уравнение можно разделить на x^2 , получив равносильное уравнение:

$$x^2 - 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x - \frac{1}{x}\right) = 0.$$

Пусть $y = x - \frac{1}{x}$, тогда $y^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$, $y^2 + 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Получим уравнение: $y^2 - 3y + 2 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = 2$.

Рассмотрим два случая:

1) $x - \frac{1}{x} = 1$, откуда $x^2 - x - 1 = 0$ и $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

2) $x - \frac{1}{x} = 2$, откуда $x^2 - 2x - 1 = 0$ и $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Ответ: $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; 1 \pm \sqrt{2}$.

Кососимметрическое уравнение 4-ой степени

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$$

можно решать подстановкой $y = x - \frac{1}{x}$.

Н

1 Ответьте на вопросы. Приведите примеры.

- а) Как решают уравнения методом разложения на множители?
б) Как при решении уравнений методом разложения на множители используют теоремы о свойствах рациональных корней многочлена с целыми коэффициентами?
в) Как решают симметрические (кососимметрические) уравнения?

2 Решите уравнение.

- а) $x(x+1)(x-2) = x^3$;
б) $(x+1)(x-2) = (x+1)(x-2)^2$;
в) $(x+1)^2(x-5) = x^2 - 25$;
г) $(x-4)x = x^3 - 4x^2$.

3 Решите уравнение.

- а) $x^3 + 3x^2 - 4x = 0$;
б) $x^3 + x^2 + 2x + 2 = 0$;
в) $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = 0$;
г) $x^4 - x^2 + 2x - 1 = 0$.

4 Решите уравнение.

- а) $x^4 + x^2 + 1 = 0$;
б) $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$;
в) $x^4 + x^2 - 6 = 0$;
г) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

5 Решите уравнение.

- а) $x^3 + 5x - 6 = 0$;
б) $x^3 + x - 10 = 0$;
в) $x^3 + 3x^2 + x - 5 = 0$;
г) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$.

6 Решите уравнение.

- а) $(x+1)^4 + 2(x+1)^2 - 3 = 0$;
б) $(2x-1)^4 + 4x^2 = 4x - 1$.
в) $x^6 + 6 = 7x^3$;
г) $x^{10} + 2x^5 = 8$.

7 Решите уравнение.

- а) $x^3 - 3x^2 - 3x + 1 = 0$;
б) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$;
в) $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$;
г) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$.

П

8 Решите уравнение.

- а) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12 = 0$;
б) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$;
в) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$;
г) $(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 9) + 6 = 0$.

9 Решите уравнение.

а) $x^2|x-3|=6x-18$;

б) $x^3+1=x|x+1|$.

10 Решите уравнение.

а) $(x^2-2x)^2-2(x-1)^2-1=0$;

в) $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$;

б) $(x^2+5x+7)^2-(x+2)(x+3)=1$;

г) $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=120$.

11 Решите уравнение.

а) $x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$;

в) $x^2+\frac{16}{x^2}-\left(x+\frac{4}{x}\right)-12=0$;

б) $x^2+\frac{1}{x^2}+7\left(x-\frac{1}{x}\right)+10=0$;

г) $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}+\frac{4}{x}\right)$.

М

12 Решите уравнение $a^2x^4-(a^2+1)x^2+1=0$, где a – некоторое число.

13 Докажите, что если m – корень уравнения $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, то и $\frac{1}{m}$ – тоже корень того же уравнения.

14 Решите уравнение.

а) $(x+3)^4+(x+5)^4=16$;

в) $4x^4-8x^3+4x-3=0$;

б) $(x-1)^4+(x+3)^4=82$;

г) $2x^3+3x^2+3x+1=0$.

15 Решите уравнение.

а) $(x^2+3x+3)(x^2-2x+3)=24x^2$;

в) $(x-1)(2x-1)(2x^2+5x+1)=9x^2$;

б) $(x^2-6x-9)^2=x(x^2-4x-9)$;

г) $(x+2)(x-3)(x-1)(x+6)=40x^2$.

16 Решите уравнение.

а) $x^4+4x-1=0$;

б) $x^4-4x^3-1=0$;

в) $x^4-8x+63=0$.

ГЛАВА IV

Предел, непрерывность и производная

4.1. Функции и способы их задания

Вам неоднократно приходилось встречаться с ситуациями, когда значение одной величины зависит от значения другой величины. Рассмотрим несколько примеров таких ситуаций.

Пример 1. Объём куба зависит от длины его ребра. Если ребро имеет длину, равную a см, а объём равен V см³, то зависимость объёма куба от длины ребра выражается формулой: $V = a^3$. В этой формуле очевидно $a > 0$, т.к. длина ребра куба является положительным числом. Обе величины, входящие в эту формулу, – переменные. Записанная формула позволяет для любого значения величины $a > 0$ найти соответствующее значение величины V . Значение переменной a при этом может быть выбрано произвольно, а значение переменной V *зависит* от выбранного значения переменной a . По этой причине переменную a называют *независимой переменной*, а переменную V называют *зависимой переменной*. Условие $a > 0$ задаёт множество, из которого берутся значения независимой переменной a . Формула $V = a^3$ представляет собой *правило* или *закон*, с помощью которого каждому значению независимой переменной a ставится в соответствие значение зависимой переменной V .

Скажем, если $a = 2$ см, то $V = 8$ см³, если $a = 10$ см, то $V = 1000$ см³, и т.д.

Чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что V зависит от a , принято писать $V(a)$. С помощью этого специального обозначения информация, содержащаяся в предыдущем абзаце, может быть записана в виде $V(2) = 8$, $V(10) = 1000$, а формула, задающая зависимость переменной V от переменной a , может быть записана в виде:

$$V(a) = a^3.$$

Разные процессы, протекающие в окружающем нас мире, характеризуются теми или иными величинами, меняющимися с течением времени, поэтому в очень многих ситуациях независимой переменной является время.

Пример 2. Камень брошен вниз с высоты 88 м со скоростью 2 м/с. Пока камень не упал, его высота h (в метрах) находится по формуле:

$$h(t) = 88 - 2t - 5t^2,$$

где t – время в секундах, прошедшее с момента броска, причём $0 \leq t \leq 4$.

Здесь уже в самой записи формулы видно, что t – независимая переменная, а h – зависимая переменная. Множество, на котором изменяется независимая переменная t , задано условием $0 \leq t \leq 4$. Формула задаёт правило, по которому можно найти значение зависимой переменной h для каждого значения независимой переменной t из этого множества. Скажем, $h(0) = 88$, $h(1) = 81$, $h(3) = 37$, $h(4) = 0$. Видно, что через 4 с после момента броска камень упадёт на землю.

Не всегда зависимость одной переменной от другой задаётся с помощью формулы.

Пример 3. На контрольной работе по математике было предложено 7 заданий. Отметка за контрольную k зависит от количества правильно выполненных заданий n следующим образом:

n	k
0	2
1	2
2	2
3	2
4	3
5	4
6	5
7	5

Здесь количество правильно выполненных заданий n – независимая переменная, а отметка за контрольную работу k – зависимая переменная. Независимая переменная может принимать значения из множества $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. В отличие от двух предыдущих примеров, правило (или закон), позволяющее для каждого значения независимой переменной из этого множества находить соответствующее значение зависимой переменной, задано не с помощью формулы, а с помощью таблицы. Пользуясь этой таблицей, можно установить, что, скажем, $k(3) = 2$, $k(4) = 3$, $k(6) = 5$, и т.д.

Общим во всех рассмотренных примерах было следующее. Имеется независимая переменная, причём известно множество, на котором она изменяется. Имеется также правило (или, по-другому, закон), с помощью которого для каждого значения независимой переменной из этого множества можно найти соответствующее (обязательно единственное) значение зависимой переменной.

В математике в такой ситуации принято говорить, что зависимая переменная является *функцией* независимой переменной. Функцией также называется правило, с помощью которого для каждого значения независимой переменной находится соответствующее значение зависимой переменной. Независимая переменная называется при этом *аргументом*, а множество, на котором изменяется независимая

переменная, называется *областью определения функции*. Область определения функции $y = f(x)$ обозначается $D(f)$ или $D(y)$.

Обратите внимание – задать функцию значит задать две вещи:

- 1) область определения функции;
- 2) правило, по которому каждому значению аргумента из области определения функции ставится в соответствие одно-единственное значение функции.

При этом правило, о котором идёт речь (правило задания функции), может быть задано самым разным образом: функцию можно задавать с помощью формулы, таблицы, графика, описания, и т.д.

В общем виде правило задания функции обозначают буквой, чаще всего латинской. Скажем, если переменная y является функцией переменной (аргумента) x , то это можно записать, например, в виде: $y = f(x)$ и прочитать: «Игрек равно эф от икс». Здесь латинской буквой f как раз и обозначено правило задания функции. Из подобной записи также видно, какая переменная является независимой (аргументом) – она записана в скобках, а какая переменная является зависимой (функцией). Скажем, запись $u = g(t)$ показывает, что переменная u является функцией аргумента t , причём закон задания этой функции обозначен буквой g . Часто закон задания функции обозначают той же буквой, что и саму зависимую переменную (функцию). Скажем, часто вместо $y = f(x)$ пишут $y = y(x)$ или просто $y(x)$, вместо $u = g(t)$ пишут $u = u(t)$ или просто $u(t)$, и т.д.

Значение функции $y = f(x)$ при значении аргумента, равном, скажем, 5, обозначается $f(5)$.

Один из самых распространённых способов задания функции – формула. В математике принято правило: если функция задана с помощью формулы, и при этом область определения функции не указана, то предполагается, что *область определения состоит из всех допустимых значений аргумента* в этой формуле. Это множество обычно называется *естественной областью определения* функции, заданной с помощью формулы.

Например, для функции, заданной формулой $y = 2x^3 - \cos x$ естественной областью определения является множество всех действительных чисел. Естественная область определения функции, заданной формулой $y = \frac{x^2 - x + 5}{x - 5}$, состоит из всех действительных чисел, кроме $x = 5$. Её можно также записать в виде: $x \neq 5$, или в виде $x \in (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$.

Для функций, заданных с помощью формулы, легко по известному значению аргумента найти соответствующее значение функции – для этого нужно подставить значение аргумента в формулу и выполнить необходимые вычисления. Скажем, чтобы найти значение функции $y = x^2 - 7x + 3$ при значении аргумента, равном 2,

подставим в формулу, задающую функцию, вместо x его значение 2. Получим: $y = 2^2 - 7 \cdot 2 + 3 = -7$ или $y = -7$. Это можно также записать в виде $y(2) = -7$.

Вы уже знаете, что важную роль при работе с функциями играют их графики. Напомним, что графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек координатной плоскости xOy , имеющих координаты $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Графиком функции обычно является некоторая линия. Скажем, вы знаете, что графиком линейной функции $y = kx + b$ является прямая, графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ (при $a \neq 0$) – парабола, графиком функции $y = \sin x$ – синусоида, и т.д. В то же время бывают такие функции, график которых изобразить просто невозможно, хотя хорошо понятно, как он устроен. Классическим примером является функция Дирихле $D(x)$, определённая следующим образом:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональное число} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число} \end{cases}$$

Понять, как устроен график этой функции несложно, а вот нарисовать его нельзя.

Вы уже имеете богатый опыт работы с графиками функций. Мы подробно повторим основные приёмы построения графиков в следующем параграфе, а также познакомимся с некоторыми новыми приёмами.

Эти приёмы относятся к построению графика функции, заданной с помощью формулы. Но очень часто бывает так, что функция *задаётся* с помощью графика. Предположим, нас интересует температура воздуха в данном населённом пункте (обычно её измеряют в определённой точке на метеорологической станции) в течение суток, от 0 часов до 24 часов по местному времени. Понятно, что в этих условиях в каждый момент времени температура воздуха принимает вполне определённое единственное значение. Таким образом, температура является функцией времени. Вряд ли мы сможем задать эту функцию с помощью какой-либо формулы, а вот графики подобных функций специалисты-метеорологи получают с помощью специальных приборов-самописцев. Бумага, на которой рисуется график, намотана на медленно вращающийся с помощью часового механизма барабан, а самопишущее перо соединено со специальным термометром.

На рис. 4.1 приведён один из графиков зависимости температуры от времени в течение суток. По оси абсцисс откладывается время в часах, а по оси ординат – температура в градусах Цельсия.

Температура ($^{\circ}\text{C}$)



Рис. 4.1

С помощью этого графика мы можем получить очень много информации о температуре за исследуемые сутки. Видно, что в момент начала наблюдений (0 часов) температура воздуха была -2°C , затем она постепенно понижалась и, достигнув примерно в 3 часа своего наименьшего значения, равного -6°C , стала возрастать, сначала побыстрее, затем помедленнее и достигла отметки 0°C в 11 часов, причём за последние три часа перед этим, с 8 до 11 часов она повысилась всего на 1 градус (от -1°C до 0°C). Потом температура увеличивалась дальше и достигнув своего наибольшего значения, примерно равного $+4,5^{\circ}\text{C}$ между 14 и 15 часами, примерно в 14 ч 40 мин, стала уменьшаться и уменьшалась до конца суток (24 часа), когда достигла значения -4°C . При этом равной 0°C температура была примерно в 20 часов.

Из графика можно извлечь много другой информации. Скажем, видно, что положительной за рассматриваемые сутки температура была в течение 9 часов (с 11.00 до 19.00), остальные 15 часов температура была отрицательной.

Н

1 Расскажите, приводя примеры:

- а) что такое независимая переменная;
- б) что такое зависимая переменная;
- в) как называется правило, ставящее в соответствие каждому значению независимой переменной единственное значение зависимой переменной.

2 Закончите предложения.

а) Областью определения функции называется ...

б) Естественной областью определения функции, заданной с помощью формулы, называется ...

3 а) Что называется графиком функции?

б) Всегда ли график функции является линией на плоскости?

4 Укажите независимую и зависимую переменные.

а) $x = y$; в) $z = t^2$; д) $p = q^3 + q - 1$;

б) $a = \frac{y+1}{y-1}$; г) $\alpha = \frac{\beta}{2} - 1$; е) $v = n \cos n$.

5 Укажите аргумент и функцию.

а) $u = \sin \frac{2}{v}$; в) $r = \operatorname{tg}(w+2)$; д) $m = \arcsin \frac{1}{c}$;

б) $y = \sqrt{t}$; г) $m = k^2$; е) $x = \frac{1}{y-2}$.

6 Велосипедист ехал 3 часа со скоростью 13 км/ч. Запишите формулу, выражающую пройденный путь s от времени t . Какая переменная является независимой и какая зависимой? Какая область определения полученной функции?

7 Поезд, двигаясь равномерно, проехал 5 км за 15 минут. Запишите формулу, выражающую пройденный путь s от времени t . Какая переменная является независимой и какая зависимой? Какая область определения полученной функции?

8 Два пешехода идут навстречу друг другу из городов A и B , расстояние между которыми равно 2 км. Первый идет со скоростью 2 км/ч, а второй со скоростью в полтора раза большей. Запишите формулу, выражающую расстояние R между ними до момента их встречи от времени t . Какая переменная является независимой и какая зависимой? Какая область определения полученной функции?

9 Функция задана формулой $y = \frac{x}{x^2 + 1}$. Начертите в тетради такую же таблицу и заполните её, вычислив значения функции при указанных значениях аргумента.

x	0	1	2	3	4	5
y						

10 Функция задана формулой $y = \frac{6}{x+6} + x + \frac{6}{x-6}$. Начертите в тетради такую же таблицу, как в предыдущей задаче, и заполните её, вычислив значения функции при указанных значениях аргумента.

11 Найдите значение функций для указанных значений аргумента.

- а) $y = \sqrt{x+5}$ для значения аргумента, равного 4; 11; 20;
 б) $y = \frac{10}{x} + x$ для значения аргумента, равного -5; 10; 2;
 в) $y = \frac{x^2+7}{x^2+9}$ для значения аргумента, равного $\frac{1}{2}$; $\sqrt{3}$; -10;
 г) $y = x + \frac{x+2}{2x+3}$ для значения аргумента, равного $\frac{1}{4}$; $-\frac{3}{2}$; -6.

12 Для функции, заданной формулой $y = 2\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+5}}$, найдите:

- а) $y(1)$; в) $y\left(\frac{1}{9}\right)$; д) $y(25)$; ж) $y\left(\frac{4}{9}\right)$;
 б) $y(4)$; г) $y(0)$; е) $y\left(\frac{1}{49}\right)$; з) $y\left(\frac{144}{121}\right)$.

13 Для функции, заданной формулой $y = \left(\frac{x+x^2}{x+2} + \frac{1}{x}\right)(x-1)$, найдите:

- а) $f(1)$; в) $f(2)$; д) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; ж) $f(\sqrt{2})$;
 б) $f(-1)$; г) $f(-4)$; е) $f\left(-\frac{5}{4}\right)$; з) $f(-5)$.

14 Найдите естественную область определения функции, заданной формулой.

- а) $y = \frac{2x+3}{5x-2} + \frac{6x-7}{2x+12}$; в) $y = \frac{\sqrt{12-23x+10x^2}}{x-2}$;
 б) $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}\sqrt{x+2}$; г) $y = \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \sqrt{\frac{3x+5}{3x-5}}$.

15 Постройте график функции.

- а) $y = \frac{x+4}{3}$; в) $y = 2 - 3x$; д) $y = \frac{x}{3} + 3\left(1 + \frac{x}{2}\right)$;
б) $y = x^2 + 3x$; г) $y = x - 6 + x^2$; е) $y = 16x^2 + 12x - 4$.

16 Постройте график функции.

- а) $y = \sin x$; в) $y = \operatorname{tg} x$;
б) $y = \cos x$; г) $y = \operatorname{ctg} x$.

17 С помощью графика, изображённого на рис. 4.2, определите:

- а) значение y , если значение x равно -2 ; 2 ; 3 ; 4 ; $4,5$;
б) значение x , если значение y равно 2 ; -3 ;
в) $y(-1)$; $y(1)$; $y(2)$; $y(3)$; $y(5)$;
г) значение x , при котором $y(x) = 2$; $y(x) = -3$.

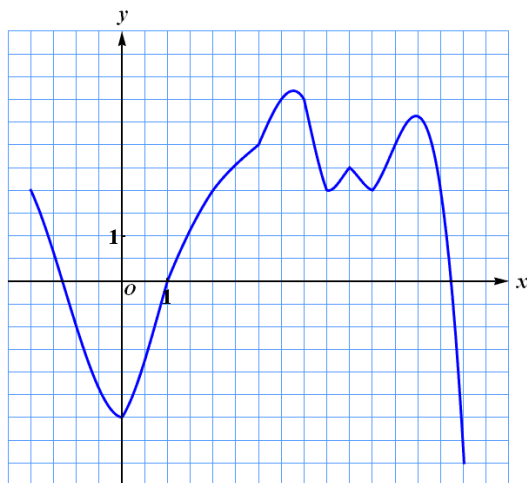


Рис. 4.2

18 С помощью графика, изображённого на рис. 4.3, определите:

- а) значение функции, соответствующее значению аргумента -5 ; 0 ; 2 ;
б) значение аргумента, при котором функция принимает значение, равное 9 ; -2 ; 8 ;
в) наибольшее значение функции;
г) значение аргумента, при котором функция принимает своё наибольшее значение;
д) наименьшее значение функции;
е) значение аргумента, при котором функция принимает своё наименьшее значение.

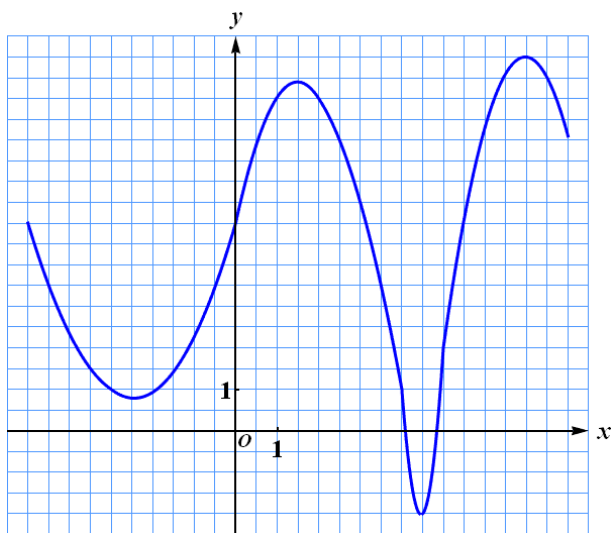


Рис. 4.3

П

19 На окружности взято n точек и каждые две точки соединены отрезком. Запишите формулой зависимость количества отрезков m от количества точек n . Какая переменная является независимой и какая зависимой? Какая область определения полученной функции?

20 Пусть $f(x) = 3x - x^2$. Найдите:

а) $f(a)$;	в) $f(2t)$;	д) $f(x+2)$
б) $f(b-1)$;	г) $f\left(\frac{2}{v}\right)$;	е) $f(\sqrt{r})$.

21 Пусть $f(x) = \frac{1+x^2+x^4}{x^2} - \frac{x^2}{x^2+1}$. Найдите:

а) $f(\alpha)$;	в) $f(\sqrt{1-b^2})$;	д) $f\left(\frac{z^2}{2}\right)$
б) $f(\sqrt{x})$;	г) $f\left(\frac{1}{z}\right)$;	е) $f(w+w^2)$.

22 На рис. 4.4 изображён график некоторой функции.

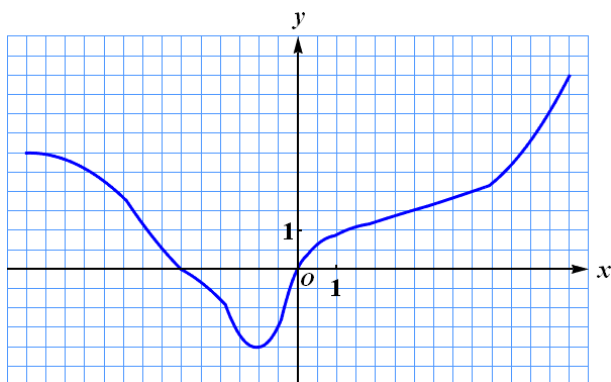


Рис. 4.4

- Запишите все значения аргумента, при которых функция равна нулю.
- Запишите три значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения.
- Запишите три значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения.
- При каких значениях аргумента функция возрастает?
- При каких значениях аргумента функция убывает?

23 Из пункта A в пункт B сначала выехал грузовой автомобиль, а через некоторое время вслед за ним легковой. По графику движения автомобилей ответьте на вопросы.

- Какое расстояние от пункта A до пункта B ?
- На сколько часов позже грузового легковой автомобиль выехал из пункта A ?
- Через сколько часов после выезда из пункта A каждый из автомобилей прибыл в пункт B ?
- С какой скоростью ехал каждый из автомобилей?

Расстояние (км)

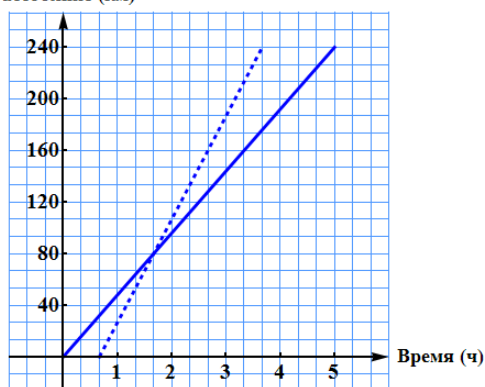


Рис. 4.5

д) Через сколько часов после своего выезда из пункта A легковой автомобиль догнал грузовой?

е) На каком расстоянии от пункта A легковой автомобиль догнал грузовой?

ж) На сколько часов раньше грузового легковой автомобиль прибыл в пункт B ?

24 Болид Формулы-1 едет 3 круга длиной 6 км каждый. На графике, представленном на рис. 4.6, отмечено кратчайшее расстояние болида от точки старта (измеренное вдоль трассы) в зависимости от времени.



Рис. 4.6

а) Какое расстояние проехал болид за 2,25 мин; за 2,5 мин; за 3 мин?

б) Сколько времени было потрачено на пит-стоп (техническую остановку) на втором круге?

в) С какой максимальной скоростью двигался болид?

г) С какой средней скоростью болид проехал эти три круга?

д) На сколько секунд быстрее болид проехал второй круг, чем первый?

е) Сколько времени потребовалось на преодоление первой половины первого круга? второй половины второго круга?

ж) За какое время проехал бы болид все три круга, если бы он всё время ехал со скоростью, равной скорости на второй половине третьего круга?

М

25 а) Всякая ли линия на координатной плоскости является графиком некоторой функции?

б) При каком условии линия на координатной плоскости является графиком некоторой функции?

4.2. Основные приёмы построения графиков функций

В курсе алгебры 9 класса мы изучили набор правил, которые можно применять при построении графиков многих функций. Общее в применении этих правил следующее. Мы начинаем с построения хорошо известного нам графика (его часто называют стартовым графиком). Затем, применяя одно или несколько сформулированных правил, получаем нужный нам график.

Перечислим правила, часто применяемые при построении графиков:

График функции $y = f(x) + l$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Oy на $|l|$ единиц вверх при $l > 0$ и вниз при $l < 0$, или, по-другому, параллельным переносом на вектор $\vec{m}(0; l)$.

График функции $y = f(x + h)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси Ox на $|h|$ единиц влево при $h > 0$ и вправо при $h < 0$, или, по-другому, параллельным переносом на вектор $\vec{m}(-h; 0)$.

Пример 1. Постройте график функции.

а) $y = \sqrt{x} + 2$; б) $y = \sqrt{x+2}$.

Решение. Здесь в каждом из случаев стартовым графиком является график функции $y = \sqrt{x}$, который мы строить умеем (рис. 4.7 а).

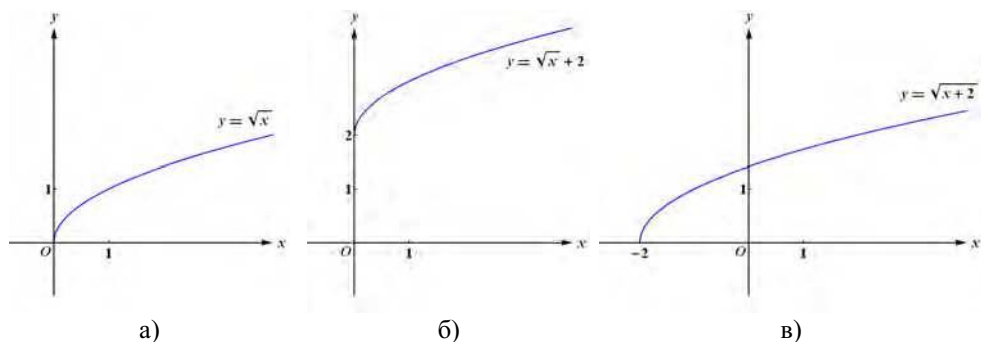


Рис. 4.7

Согласно первому из сформулированных выше правил, график функции $y = \sqrt{x} + 2$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ сдвигом вдоль оси Oy на 2 единицы вверх (рис. 4.7 б). Можно также сказать, что мы применили параллельный перенос графика функции $y = \sqrt{x}$ на вектор $\vec{m}(0; 2)$.

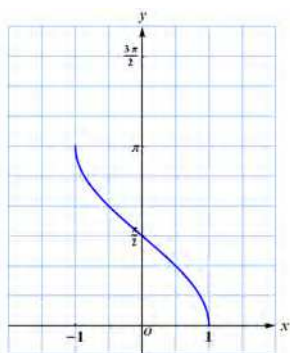
Согласно второму из сформулированных выше правил, график функции $y = \sqrt{x+2}$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ сдвигом вдоль оси Ox на 2 единицы влево (рис. 4.7 в). Можно также сказать, что мы применили параллельный перенос графика функции $y = \sqrt{x}$ на вектор $\vec{m}(-2; 0)$.

Иногда приходится выполнять оба описанных выше параллельных переноса. Это можно делать пошагово, а можно сразу на результирующий вектор. Можно сформулировать следующее правило:

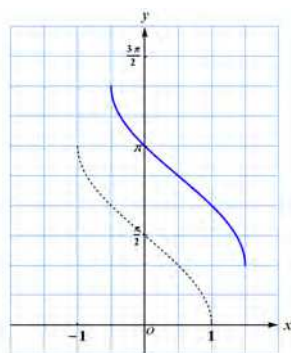
График функции $y = f(x+h)+l$ получается из графика функции $y = f(x)$ параллельным переносом на вектор $\vec{m}(-h; l)$.

Пример 2. Постройте график функции $y = \arccos\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{3}$.

Решение. Стартовым здесь является известный нам график функции $y = \arccos x$ (рис. 4.8 а). Нужный график получится из него параллельным переносом на вектор $\vec{m}\left(\frac{1}{2}; \frac{\pi}{3}\right)$, т.е. сдвигом вдоль оси Ox на $\frac{1}{2}$ единицы вправо с последующим сдвигом вдоль оси Oy на $\frac{\pi}{3}$ единицы вверх (рис. 4.8 б). Заметим, что сдвиги можно осуществлять и в другом порядке: сначала вдоль оси Oy , а затем вдоль оси Ox .



а)



б)

Рис. 4.8

Часто встречаются ситуации, в которых основная трудность заключается в преобразовании формулы, задающей функцию, к виду, который позволил бы применить обсуждаемые правила построения графиков. Научимся, к примеру, строить график *дробно-линейной функции*, т.е. функции, задаваемой формулой вида

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$, где $c \neq 0$. Название функции объясняется тем, что в правой части стоит частное двух линейных выражений.

Областью определения этой функции является множество всех действительных чисел x , таких что $x \neq -\frac{d}{c}$, т.е. $D(y) = \left(-\infty; -\frac{d}{c}\right) \cup \left(-\frac{d}{c}; +\infty\right)$.

Если $a \neq 0$, то алгебраическая дробь $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ является неправильной, и может быть представлена в виде суммы числа и правильной дроби с таким же знаменателем. Такое представление можно получить, например, деля числитель на знаменатель с остатком. В результате преобразований получим: $y = \frac{k}{x+h} + l$. Можно запомнить, что $h = \frac{d}{c}$; $l = \frac{a}{c}$; $k = \frac{bc-ad}{c^2}$, а можно каждый раз выполнять преобразования непосредственно.

Теперь обсудим, как строить график $y = \frac{k}{x+h} + l$. Возможны два случая.

1) Если $k = 0$ (т.е. в начальной формуле $bc = ad$), то уравнение переписывается в виде $y = l$, и графиком является прямая, параллельная оси Ox , из которой выколота точка с абсциссой $-\frac{d}{c}$.

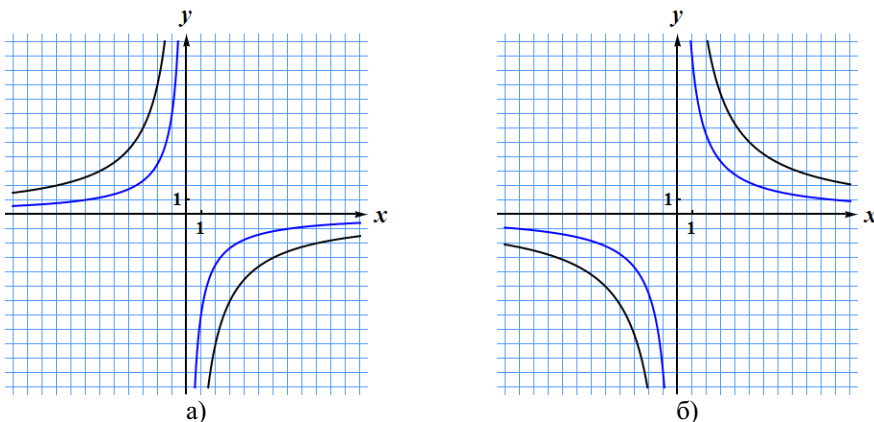


Рис. 4.9

2) Если $k \neq 0$ (т.е. в начальной формуле $bc \neq ad$), то начинаем со стартового графика $y = \frac{k}{x}$. Из курса алгебры восьмого класса вы знаете, что этот график представляет собой гиперболу, ветви которой расположены во второй и четвёртой координатных четвертях при $k < 0$ (рис. 4.9 а), и в первой и третьей координатных четвертях при $k > 0$ (рис. 4.9 б).

Теперь осталось выполнить параллельный перенос на вектор $\vec{m}(-h; l)$.

Пример 3. Постройте график функции $y = \frac{-2x+3}{x-1}$.

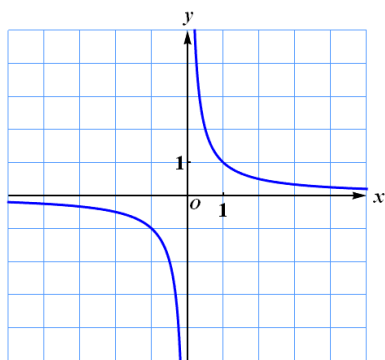
Решение. Областью определения этой функции является множество всех действительных чисел x , таких что $x \neq 1$, т.е. $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Преобразуем дробь $\frac{-2x+3}{x-1}$, для чего выполним деление числителя на знаменатель:

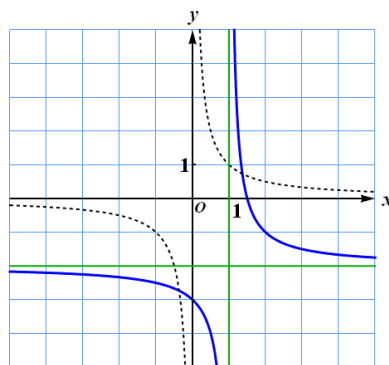
$$\begin{array}{r} -2x+3 \quad |x-1 \\ -2x+2 \quad -2 \\ \hline 1 \end{array}$$

Таким образом, $\frac{-2x+3}{x-1} = \frac{1}{x-1} - 2$.

Построение графика выполняем следующим образом. В качестве стартового графика берём гиперболу $y = \frac{1}{x}$ (рис. 4.10 а), затем выполняем параллельный перенос этой гиперболы на вектор $\vec{m}(1; -2)$, т.е сдвигая её вдоль оси Ox на 1 единицу вправо и вдоль оси Oy на 2 единицы вниз (рис. 4.10 б).



а)



б)

Рис. 4.10

Заметим, что прямая $y = -2$ является горизонтальной асимптотой построенного графика $y = \frac{-2x+3}{x-1}$, а прямая $x=1$ – вертикальной. На этот счёт имеется общее правило: «Если преобразуемый график имеет асимптоты, то с ними выполняются те же преобразования, что и с графиком».

Кроме сдвигов (или по-другому, параллельных переносов), можно выполнять и другие преобразования графиков – растяжения или сжатия вдоль координатных осей и осевые симметрии (отражения относительно координатных осей). Вспомним правила этих преобразований:

График функции $y = a \cdot f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ растяжением от оси Ox (параллельно оси Oy) в a раз при $a > 1$, и сжатием к оси Ox (параллельно оси Oy) в $\frac{1}{a}$ раз при $0 < a < 1$.

График функции $y = -f(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно оси Ox .

Пример 4. Постройте график функции.

а) $y = 2\sqrt{x}$; б) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$; в) $y = -\sqrt{x}$; г) $y = -1,5\sqrt{x}$.

Решение. Здесь стартовым является график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 4.11).

а) График функции $y = 2\sqrt{x}$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ растяжением от оси Ox (параллельно оси Oy) в 2 раза (рис. 4.12).

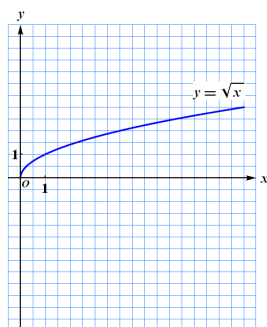


Рис. 4.11

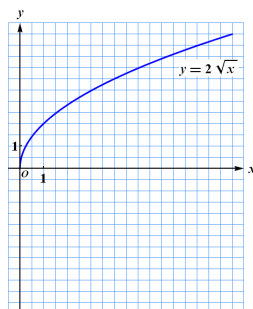


Рис. 4.12

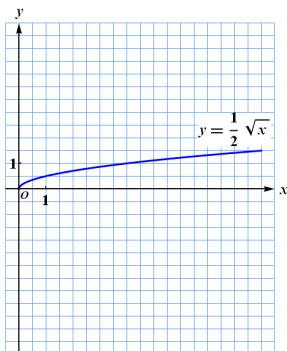


Рис. 4.13

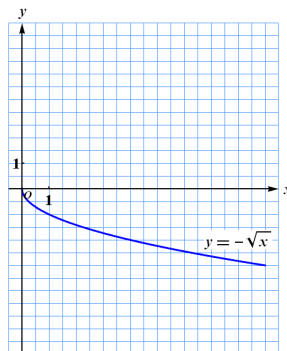
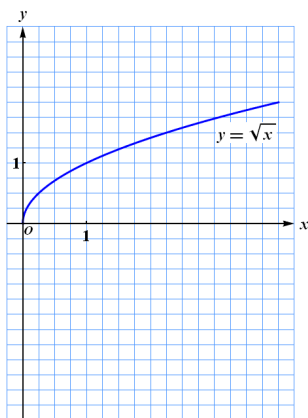


Рис. 4.14

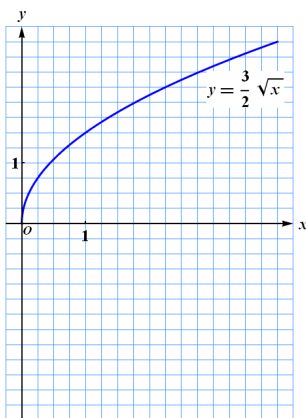
б) График функции $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ сжатием к оси Ox (параллельно оси Oy) в 2 раза (рис. 4.13).

в) График функции $y = -\sqrt{x}$ получается из графика функции $y = \sqrt{x}$ с помощью симметрии (зеркального отражения) относительно оси Ox (рис. 4.14).

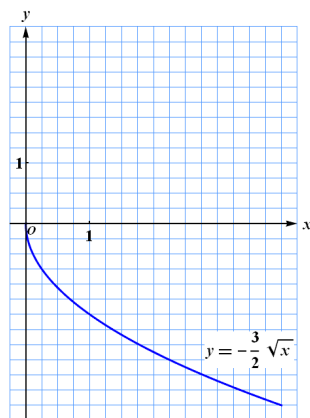
г) Для получения графика функции $y = -1,5\sqrt{x}$ из стартового графика $y = \sqrt{x}$ (рис. 4.15 а), придётся выполнить два преобразования: сначала растяжение от оси Ox (параллельно оси Oy) в 1,5 раза (рис. 4.15 б), а затем симметрию (зеркальное отражение) относительно оси Ox (рис. 4.15 в).



а)



б)



в)

Рис. 4.15

Имеются похожие правила для растяжения или сжатия вдоль оси Ox :

График функции $y = f(ax)$ получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием к оси Oy (параллельно оси Ox) в a раз при $a > 1$, и растяжением от оси Oy (параллельно оси Ox) в $\frac{1}{a}$ раз при $0 < a < 1$.

График функции $y = f(-x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно оси Oy .

Пример 5. Постройте график функции.

- а) $y = \arccos 2x$; б) $y = \arccos \frac{x}{2}$; в) $y = \arccos(-x)$.

Решение. Здесь стартовым является график функции $y = \arccos x$ (рис. 4.16).

- а) График функции $y = \arccos 2x$ получается из графика функции $y = \arccos x$ сжатием к оси Oy (параллельно оси Ox) в 2 раза (рис. 4.17).

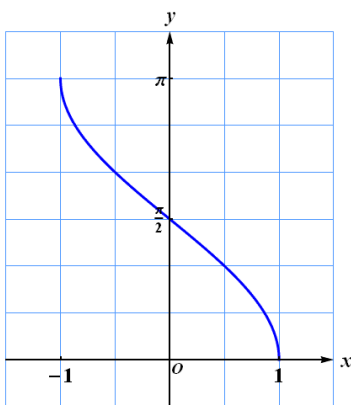


Рис. 4.16

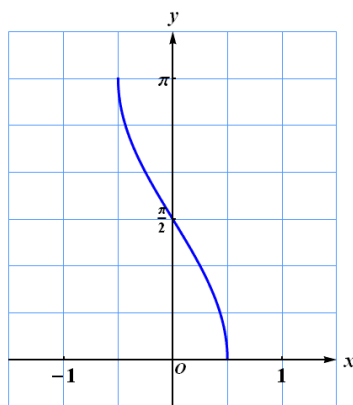


Рис. 4.17

- б) График функции $y = \arccos \frac{x}{2}$ получается из графика функции $y = \arccos x$ растяжением от оси Oy (параллельно оси Ox) в 2 раза (рис. 4.18).

- в) График функции $y = \arccos(-x)$ получается из графика функции $y = \arccos x$ с помощью симметрии (зеркального отражения) относительно оси Oy (рис. 4.19).

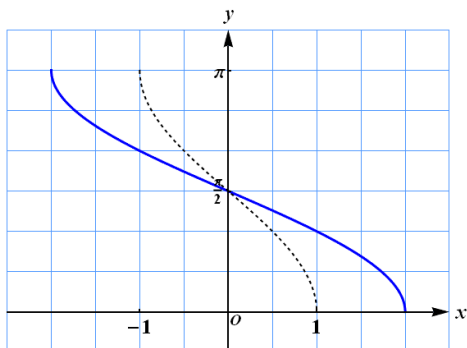


Рис. 4.18

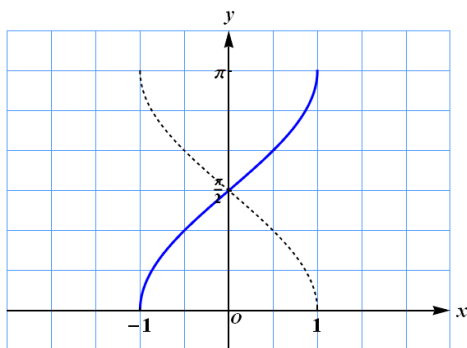


Рис. 4.19

Обсудим теперь приёмы построения графиков, задаваемых формулами, содержащими модули (иногда, допуская вольность речи, кратко говорят «графиков с модулями»).

Среди этих приёмов можно выделить общий приём, не зависящий от специфического вида формулы, задающей функцию, и два приёма, работающих очень быстро, но только для функций специального вида (в противовес общему приёму их иногда называют кустарными приёмами). Естественно, для уверенного построения графиков с модулями необходимо знать и общий приём, и кустарные приёмы – у каждого из них своя сфера применимости. Начнём с кустарных приёмов.

График функции $y = |f(x)|$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: участки графика $y = f(x)$, расположенные выше оси Ox или на ней, остаются без изменения, а участки, расположенные ниже оси Ox , зеркально отражаются относительно неё.

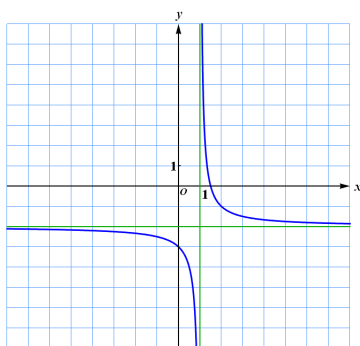
Про это правило образно говорят, что оно относится к ситуации, когда модуль «навешен» на всю функцию. Оно основано на определении модуля:

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0 \end{cases}$$

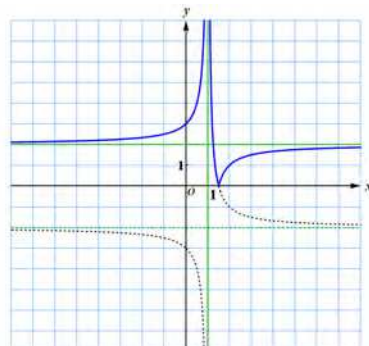
и правиле построения графика функции $y = -f(x)$ по известному графику функции $y = f(x)$, сформулированному выше.

Пример 6. Постройте график функции $y = \left| \frac{-2x+3}{x-1} \right|$.

Решение. Для применения рассмотренного выше правила стартовым будет являться график функции $y = \frac{-2x+3}{x-1}$, который мы уже построили в начале этого параграфа. Он изображён на рис. 4.10 б. Для удобства работы мы ещё раз воспроизведём его на рис. 4.20 а. Оставим участки графика, расположенные выше оси Ox или на ней, без изменения, а участки, расположенные ниже оси Ox , зеркально отразим относительно неё (при этом также отражаем горизонтальную асимптоту $y = -2$). Полученный график изображён на рис. 4.20 б.



а)



б)

Рис. 4.20

Рассмотрим второе кустарное правило построения графиков с модулями.

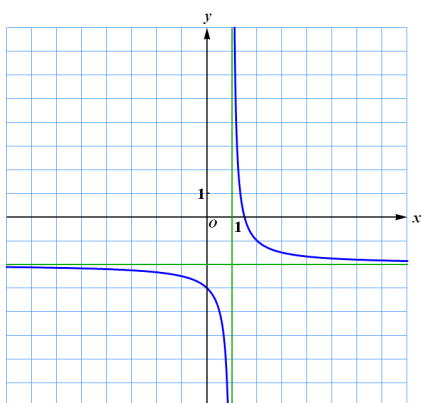
График функции $y = f(|x|)$ получается из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: участки графика $y = f(x)$, расположенные правее оси Oy или на ней, остаются без изменения, а участки, расположенные левее оси Oy , уничтожаются, и взамен них берётся зеркальное отражение участков, лежащих правее оси Oy .

Первая часть описанного правила основана на том, что при $x \geq 0$ выполняется равенство $|x| = x$, а вторая – на том, что поскольку $|-x| = |x|$, функция $y = f(|x|)$ является чётной, а значит, её график симметричен относительно оси Oy . Про это правило образно говорят, что оно относится к ситуации, когда модуль «навешен» только на x .

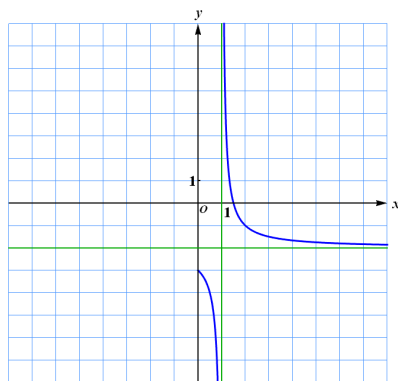
Пример 7. Постройте график функции $y = \frac{-2|x|+3}{|x|-1}$.

Решение. Для применения рассмотренного выше правила стартовым будет являться график функции $y = \frac{-2x+3}{x-1}$, с которым мы работали в предыдущем примере. Для удобства работы он ещё раз воспроизведён на рис. 4.21 а. Оставим участки графика, расположенные правее оси Oy или на ней, без изменения, а участки, расположенные левее оси Oy , уничтожим (рис. 4.21 б).

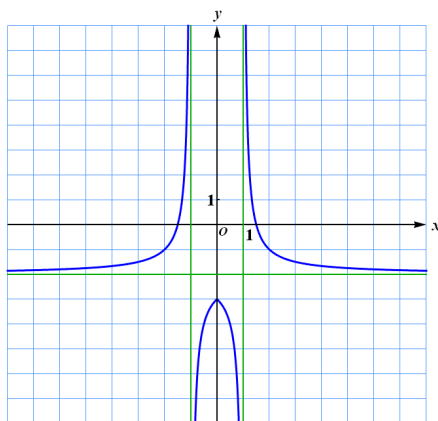
Теперь отразим зеркально относительно оси Oy часть графика, изображённую на рис. 4.21 б. При этом также отражаем вертикальную асимптоту $x=1$. Получим искомый график функции $y = \frac{-2|x|+3}{|x|-1}$ (рис. 4.21 в).



а)



б)



в)

Рис. 4.21

Перейдём к изложению общего метода построения графиков с модулями. Он носит название *метод областей*, которое станет понятным в процессе работы. Заметим, что этот метод годится не только для построения графиков с модулями, но и любых множеств на координатной плоскости xOy , задаваемых уравнениями с переменными x и y , содержащими модули.

Сначала для простоты, чтобы сосредоточиться на главном, рассмотрим ситуацию, когда областью определения функции является множество всех действительных чисел, и среди модулей нет «матрёшечных», т.е. конструкций «модуль внутри модуля».

1) Приравняем к нулю выражение, стоящее внутри каждого модуля.

2) Нанесём на координатную плоскость xOy линии, задаваемые полученными уравнениями. Эти нанесённые на плоскость линии разобьют её на части, называемые *областями* (отсюда и название метода).

3) В каждой области будем работать отдельно. Для этого с помощью пробной точки (любая точка, лежащая *внутри* области) снимем знаки всех модулей, перепишем уравнение без модулей и построим задаваемую им линию.

4) Важно помнить, что нам нужна не вся эта линия, а только та её часть, которая принадлежит области, в которой мы работали. Для уточнения хода этой линии придётся находить точки её пересечения с границами области. Следует помнить, что границу области удобно считать принадлежащей каждой из областей, которые она разграничивает.

Рассмотрим пример на построение графика с модулем методом областей.

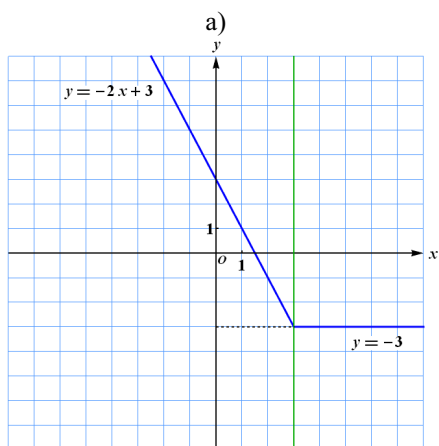
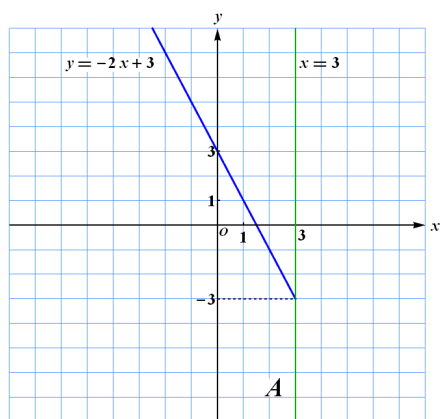
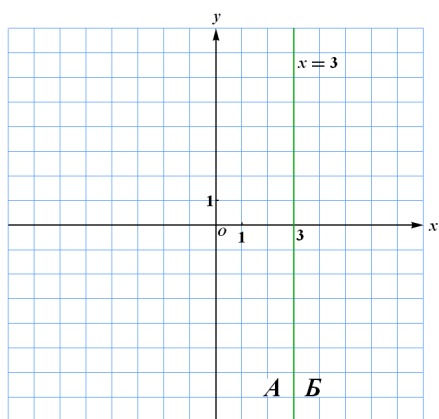
Пример 8. Постройте график функции $y = |x - 3| - x$.

Решение. Поскольку здесь нельзя сказать, что модуль «навешен» на всю функцию, или только на x , ни один из известных нам кустарных приёмов не работает. Воспользуемся методом областей.

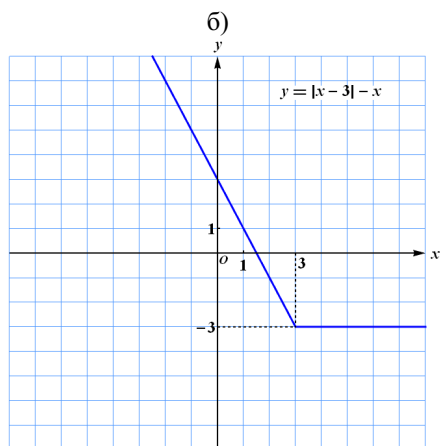
Приравнявая к нулю единственное стоящее под знаком модуля выражение, получим: $x - 3 = 0$, или $x = 3$. Это уравнение задаёт на координатной плоскости xOy прямую, параллельную оси Oy . Нанесём её на координатную плоскость. Она разобьёт её на две области – полуплоскости. Назовём их А и Б (рис. 4.22 а). Будем работать в каждой области отдельно.

А) Возьмём в области А пробную точку, скажем $(-5; 0)$, т.е. $x = -5$; $y = 0$, и подставим эти числа в выражение, стоящее внутри модуля. Поскольку выражение $x - 3$ в этой точке отрицательно, то модуль в области А снимается с противоположным знаком, т.е. $|x - 3| = -x + 3$. В результате уравнение, задающее функцию в области А, примет вид: $y = -x + 3 - x$, или $y = -2x + 3$. Это уравнение прямой, и мы можем построить эту прямую по двум точкам. Удобно (хотя вовсе не обязательно!) брать эти точки так, чтобы они лежали в области А. Удобно также, если есть возможность, брать хотя бы одну точку на границе области. У нас при $x = 0$ $y = 3$ и при $x = 3$ $y = -3$. Проводим через точки $(0; 3)$ и $(3; -3)$ прямую, причём сразу ту её часть, которая лежит в области А (рис. 4.22 б).

Б) Возьмём в области Б пробную точку, скажем $(10; 0)$, т.е. $x=10; y=0$, и подставим эти числа в выражение, стоящее внутри модуля. Поскольку выражение $x-3$ в этой точке положительно, то модуль в области Б снимается простым отбрасыванием модульных скобок (многие ребята любят произносить не совсем аккуратную, но понятную фразу «со своим знаком»), т.е. у нас $|x-3|=x-3$. В результате уравнение, задающее функцию в области Б, примет вид: $y = x-3-x$, или $y = -3$. Это уравнение прямой, параллельной оси Ox , и её построение не представляет труда. Рисуем прямую $y = -3$, причём сразу ту её часть, которая лежит в области Б (рис. 4.22 в).



в)



г)

Рис. 4.22

В результате получаем график функции $y = |x - 3| - x$. Он имеет вид, как изображено на рис. 4.22 г. Заметьте, что сами области и линии – границы областей – на окончательном графике отсутствуют. Они, подобно строительным лесам, помогают нам строить, а затем убираются.

Н

1 Как из графика функции $y = f(x)$ получить график функции:

а) $y = f(x) + 3$, $y = f(x) - 2$?

б) $y = f(x + 2)$, $y = f\left(x - \frac{1}{2}\right)$?

в) $y = f(4x)$, $y = f\left(\frac{x}{5}\right)$?

г) $y = 3f(x)$, $y = \frac{1}{10}f(x)$?

2 а) Чем отличается график функции $y = f(x)$ от графика функции $y = |f(x)|$?

б) Чем отличается график функции $y = f(x)$ от графика функции $y = f(|x|)$?

в) Чем отличается график функции $y = f(x)$ от графика функции $y = |f(|x|)|$?

3 а) Какая функция называется дробно-линейной?

б) Какова область определения дробно-линейной функции?

в) К какому виду можно свести любую дробно-линейную функцию?

г) Какова область значений дробно-линейной функции?

4 Имеется график функции $y = f(x)$.

а) Как построить график функции $y = f(-x)$?

б) Как построить график функции $y = -f(x)$?

в) Как построить график функции $y = -f(-x)$?

5 а) Является ли график функции $y = \frac{x-1}{1+x}$ симметричным графику функции

$$y = \frac{1-x}{1+x} \text{ относительно оси абсцисс?}$$

б) Графику какой функции симметричен график функции $y = \frac{x^2}{2x+3}$ относительно оси ординат?

в) Верно ли, что графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(-x)$ симметричны относительно начала координат?

6 Имеет ли график функции $y = f(|x|)$ вертикальную асимптоту $x = -2$, если $f(x) = \frac{2x}{x+2}$? Если нет, объясните, почему. Если да, объясните почему.

7 Постройте график функции.

а) $f(x) = \sqrt{x+3}$; в) $f(x) = -\sqrt{-x}$; д) $f(x) = \sqrt{2x+3}$;

б) $f(x) = 2\sqrt{x-1}$; г) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{|x|}$; е) $f(x) = \sqrt{4-x}$.

8 Постройте график функции.

а) $f(x) = \frac{x+2}{x+3}$; в) $f(x) = \frac{2x+4}{3x}$; д) $f(x) = \frac{1-2x}{2-4x}$;

б) $f(x) = \frac{1-2x}{x+3}$; г) $f(x) = \frac{x}{x-1}$; е) $f(x) = \frac{2}{2+x}$.

9 Постройте график функции.

а) $f(x) = \sin|x|$; в) $f(x) = \operatorname{tg}|x|$; д) $f(x) = |\sin x|$;

б) $f(x) = \cos|x|$; г) $f(x) = \operatorname{ctg}|x|$; е) $f(x) = |\cos x|$.

10 Постройте график функции.

а) $f(x) = 2\arccos 3x$; в) $f(x) = |\operatorname{arctg} x|$;

б) $f(x) = \frac{1}{\pi} \arcsin|x|$; г) $f(x) = -2\arcsin(-4x)$.

11 Постройте график функции.

а) $f(x) = \operatorname{tg}|x|$; в) $f(x) = |\operatorname{tg}|x||$;

б) $f(x) = \operatorname{ctg}|x|$; г) $f(x) = |\operatorname{ctg}|x||$.

12 Постройте график функции.

а) $f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$; в) $f(x) = (2x-3)^2 + 4$;

б) $f(x) = 2(1-3x)^2 - 2$; г) $f(x) = 2 - 3\left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$.

13 Постройте график функции.

а) $f(x) = |2x-1|$; в) $f(x) = 2|1-4x|$;

б) $f(x) = 1 + \left|\frac{x}{2} + 1\right|$; г) $f(x) = 1 - 3|x+3|$.

14 Постройте график функции.

а) $f(x) = 1 - \sqrt{|x|+2}$; в) $f(x) = \frac{1}{|x-2|}$;

б) $f(x) = 1 - |\cos x|$; г) $f(x) = \frac{5|x|}{2|x|+3}$.

П

15 Постройте график функции.

а) $f(x) = \frac{3|x|+1}{1-|x|}$; в) $f(x) = \left|\frac{2x+6}{3x}\right|$;

б) $f(x) = \frac{2|x|+3}{|x|-1}$; г) $f(x) = \left|\frac{x}{x+4}\right|$.

16 Постройте график функции.

а) $f(x) = \pi - 3\arcsin(2-4x)$; в) $f(x) = \frac{2}{\pi}\arctg(3x+5) - 2$.

б) $f(x) = 2\pi + \frac{2}{3}\arccos\left(\frac{x}{2} + 2\right)$; г) $f(x) = 2 - \frac{3}{\pi}\operatorname{arccctg}\left(1 - \frac{2}{3}x\right)$.

17 Постройте график функции.

а) $f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) + 2$; в) $f(x) = -2 - \frac{1}{2}\operatorname{tg}(3x+1)$;

б) $f(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{3x}{4} + \pi\right) - 3$; г) $f(x) = -\pi\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) - \frac{\pi}{2}$.

18 Постройте график функции.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } f(x) = \sqrt{9+12x+4x^2}; & \text{в) } f(x) = \sqrt{16+\frac{x^2}{9}-\frac{8x}{3}}; \\ \text{б) } f(x) = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{25x^2}{4}-10x+4}; & \text{г) } f(x) = \sqrt{5x^2-2\sqrt{10}x+2}. \end{array}$$

19 Постройте график функции.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } f(x) = \frac{|2|x||}{||x|-1|}; & \text{в) } f(x) = \frac{|1+2x|}{|x|}; \\ \text{б) } f(x) = |1-\sqrt{|x|}|; & \text{г) } f(x) = \left| \sin\left|x-\frac{\pi}{2}\right| + 1 \right|. \end{array}$$

М

20 Постройте график функции.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } f(x) = -\sqrt{2-|4x-1|}; & \text{в) } f(x) = \cos(2x+2|x|); \\ \text{б) } f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{|5x|+|2x+3|}; & \text{г) } f(x) = -\frac{\sin|x|}{|\cos x|}. \end{array}$$

21 Постройте график функции.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } f(x) = |x+|x+|x||; & \text{в) } f(x) = \frac{|x|}{2} + |x+1| + |x-1|; \\ \text{б) } f(x) = x + |2x-3|x||; & \text{г) } f(x) = \sqrt{x^2} - 2|x-|3x+1||. \end{array}$$

4.3. Понятие предела функции на бесконечности

Начнём с конкретного примера. Рассмотрим функцию $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Область определения этой функции – множество положительных действительных чисел: $D(f) = (0; +\infty)$. Исследуем, как изменяются значения этой функции при неограниченном возрастании аргумента x .

Составим таблицу значений функции при нескольких значениях аргумента:

x	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{14}$

Возьмём «совсем большие» значения аргумента:

x	10000	1000000	100000000	10000000000	1000000000000
y	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$	$\frac{1}{100000}$	$\frac{1}{1000000}$

Вторую таблицу можно переписать, используя степени числа 10, и продолжить её дальше:

x	10^4	10^6	10^8	10^{10}	10^{12}	10^{14}	10^{20}	10^{40}	10^{100}	10^{500}	10^{1000}	10^{100000}
y	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{10^4}$	$\frac{1}{10^5}$	$\frac{1}{10^6}$	$\frac{1}{10^7}$	$\frac{1}{10^{10}}$	$\frac{1}{10^{20}}$	$\frac{1}{10^{50}}$	$\frac{1}{10^{250}}$	$\frac{1}{10^{500}}$	$\frac{1}{10^{50000}}$

Мы видим, что при неограниченном увеличении значений аргумента значения функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ приближаются к нулю. Говорят также: стремятся к нулю.

Вместо слов «значения аргумента неограниченно возрастают» принято также говорить «значения аргумента стремятся к $+\infty$ » и записывать это в виде $x \rightarrow +\infty$.

Фраза «значения функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ стремятся к нулю» может быть записана в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0.$$

Таким образом, то, что мы выше выражали с помощью слов «при неограниченном увеличении значений аргумента значения функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

стремятся к нулю» может быть записано так: $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

Используется ещё одна терминология. Говорят, что *предел* функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ при $x \rightarrow +\infty$ равен 0 и записывают это так: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$. В этом обозначении использованы начальные буквы слова «предел» на латыни (limes).

Какой же точный смысл вкладывается в слова «предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ равен числу A » и соответственную запись $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$?

Этот смысл таков: Какое бы малое положительное число мы не взяли, начиная с некоторого значения аргумента (т.е. при всех значениях аргумента, больших него), значения функции отличаются от числа A меньше, чем на это малое положительное число.

Традиционно положительное число, о котором идёт речь в предыдущем абзаце, принято обозначать греческой буквой ε (эпсилон).

Поскольку расстояние между двумя точками на числовой оси равно модулю их разности, то мы приходим к следующему определению предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(m; +\infty)$, где m – некоторое действительное число. Мы говорим, что число A является пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое действительное число p , что при всех $x > p$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Тот факт, что число A является пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ записывается либо так: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, либо так: $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow +\infty$.

Доказательство того факта, что предел данной функции при $x \rightarrow +\infty$ равен данному числу, может оказаться и очень простой, и очень сложной задачей. Обычный подход к её решению следующий: выписывают неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ и пытаются доказать, что множество его решений содержит интервал вида $(p; +\infty)$, где p – некоторое действительное число. В несложных случаях неравенство удаётся попросту решить, а в сложных, когда решить его невозможно, приходится применять разного вида оценочные рассуждения.

Докажем для начала, что предел, с рассмотрения которого мы начали данный параграф, действительно равен нулю, т.е. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ для данного случая имеет вид $\left| \frac{1}{\sqrt{x}} - 0 \right| < \varepsilon$, или в силу положительности радикала, $\frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon$. Здесь тот самый случай, когда неравенство легко решается (мы пользуемся положительностью радикала и числа ε):

$$1 < \varepsilon \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Таким образом, в качестве действительного числа p из определения предела можно взять $p = \frac{1}{\varepsilon^2}$. Тогда при $x > p$, т.е. $x > \frac{1}{\varepsilon^2}$ будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x}} < \varepsilon, \text{ т.е. неравенство } \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - 0 \right| < \varepsilon, \text{ а по определению предела, это и значит, что}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Обратите внимание, что в рассмотренном примере нам удалось явно выразить p через ε . Определение предела вовсе не предполагает такого выражения. Нужно лишь установить, что такое число p *может быть найдено* для любого $\varepsilon > 0$. Явно выразить p через ε удаётся лишь при нахождении самых простых пределов.

Пределы функций при $x \rightarrow +\infty$ имеют много различных свойств. Некоторые из этих свойств мы будем аккуратно доказывать, а некоторые в курсе математики средней школы доказать либо очень сложно, либо вообще невозможно. Такие свойства мы будем принимать без доказательства. Их обычно доказывают в университетских курсах математического анализа. Иногда из нескольких похожих теорем мы будем доказывать лишь одну, оставляя вам возможность получить доказательства остальных самостоятельно.

Начнём с формулировки следующего свойства, которое называется *единственностью предела*:

Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow +\infty$, то этот предел единственный.

Можно сказать и так: Функция не может иметь двух различных пределов при $x \rightarrow +\infty$. Эту теорему мы примем без доказательства.

При нахождении пределов часто возникает следующая ситуация. Предположим, что мы знаем пределы двух функций при $x \rightarrow +\infty$. Существуют ли пределы суммы, разности, произведения и частного этих функций при $x \rightarrow +\infty$, и если существуют, то как их найти?

Начнём с суммы. Оказывается, если две функции имеют пределы при $x \rightarrow +\infty$, то сумма этих функций тоже имеет предел при $x \rightarrow +\infty$, равный сумме этих пределов. Точнее:

Если существуют $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = B$, то существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x))$, причём $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = A + B$.

Совсем кратко это записывают в виде: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, молчаливо подразумевая для краткости, что раз пределы записаны, то они существуют.

Докажем сформулированное утверждение.

Возьмём любое $\varepsilon > 0$ и докажем, что можно найти такое действительное число p , что при всех $x > p$ выполняется неравенство: $|(f(x) + g(x)) - (A + B)| < \varepsilon$.

Мы знаем, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. Возьмём число $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Для него существует такое действительное число p_1 , что при всех $x > p_1$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Мы знаем также, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = B$. Опять возьмём число $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Для него существует такое действительное число p_2 , что при всех $x > p_2$ выполняется неравенство $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Пусть теперь p равно большему из чисел p_1 и p_2 (если же числа p_1 и p_2 равны, то возьмём p равным любому из них). Это принято записывать так: $p = \max\{p_1; p_2\}$.

Тогда при $x > p$ будут выполняться оба неравенства $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$. Складывая их, получим: $|f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Учитывая полученное неравенство, а также неравенство $|a + b| \leq |a| + |b|$, имеем:

$$|(f(x) + g(x)) - (A + B)| = |(f(x) - A) + (g(x) - B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \varepsilon$$

Итак, взяв любое $\varepsilon > 0$, мы нашли такое действительное число p , что при всех $x > p$ выполняется неравенство: $|(f(x) + g(x)) - (A + B)| < \varepsilon$, и тем самым доказали, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = A + B$.

Для разности, произведения и частного функций, имеющих пределы, справедливы теоремы, аналогичные доказанной:

Пусть существуют $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = B$. Тогда:

- 1) существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x))$, причём $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = A - B$;
- 2) существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x))$, причём $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x)) = AB$;
- 3) если $B \neq 0$, то существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Так же, как и для суммы, совсем кратко это выражают фразами: «предел разности равен разности пределов», «предел произведения равен произведению пределов»,

«предел частного равен частному пределов, при условии, что предел делителя отличен от нуля».

Доказательства этих теорем мы не приводим; в основных деталях они аналогичны доказательству теоремы для суммы.

Аналогично тому, как был определён предел функции при $x \rightarrow +\infty$, можно дать определение предела функции при $x \rightarrow -\infty$.

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(-\infty; m)$, где m – некоторое действительное число. Мы говорим, что число A является пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое действительное число p , что при всех $x < p$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначения аналогичны рассмотренному случаю $x \rightarrow +\infty$. Тот факт, что число A является пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$ записывается либо так: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, либо так: $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow -\infty$.

Точно так же, как рассмотрено выше в случае $x \rightarrow +\infty$, если функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow -\infty$, то этот предел единственный.

Имеют место абсолютно аналогичные теоремы о пределах суммы, разности, произведения и частного функций, имеющих пределы при $x \rightarrow -\infty$:

Пусть существуют $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = B$. Тогда:

- 1) существует $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + g(x))$, причём $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + g(x)) = A + B$;
- 2) существует $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x))$, причём $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = A - B$;
- 3) существует $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)g(x))$, причём $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)g(x)) = AB$;
- 4) если $B \neq 0$, то существует $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Доказательства этих теорем в основных деталях аналогичны доказательству теоремы для суммы, которое дано выше в случае $x \rightarrow +\infty$.

В заключение параграфа поговорим о геометрической иллюстрации того факта, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ или $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = C$.

Пусть мы имеем такую функцию $f(x)$, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. Построим в одной системе координат графики функций $y = f(x)$ и $y = A$. Второй график представляет

собой прямую, параллельную оси Ox (или совпадающую с ней при $A=0$). При традиционном расположении координатных осей удобно говорить «горизонтальную прямую». Обычно говорят так: «Тот факт, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, геометрически значит, что при неограниченном возрастании аргумента x график функции $y = f(x)$ неограниченно приближается к горизонтальной прямой $y = A$ ». Напомним, что такую прямую называют *горизонтальной асимптотой* графика $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$.

Уточним, что это значит. По определению предела для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое действительное число p , что при всех $x > p$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Геометрически это значит, что при значениях аргумента из интервала $(p; +\infty)$ ординаты точек графиков $y = f(x)$ и $y = A$ отличаются друг от друга менее чем на ε . Можно сказать по-другому: при $x \in (p; +\infty)$ график функции $y = f(x)$ полностью лежит внутри полосы между горизонтальными прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$ (рис. 4.23).

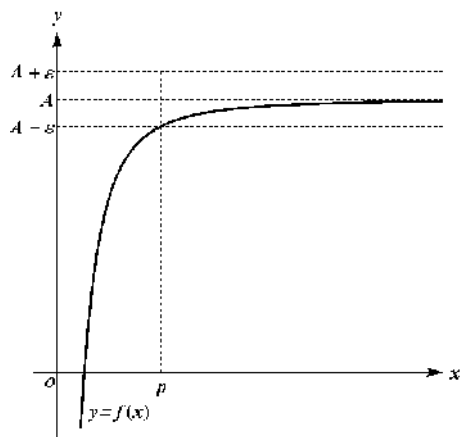


Рис. 4.23

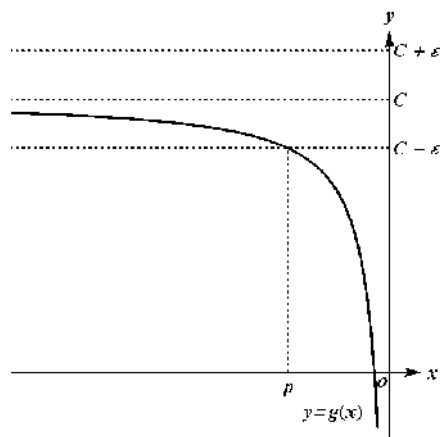


Рис. 4.24

Можно предложить такую наглядную интерпретацию этого утверждения. Предположим, что мы разглядываем графики $y = f(x)$ и $y = A$ с помощью оптического прибора, имеющего точность ε . Другими словами, этот прибор не позволяет различать точки, отстоящие одна от другой, на расстояние, меньшее, чем ε . Тогда, правее некоторой точки графики $y = f(x)$ и $y = A$ будут сливаться (т.е. выглядеть

для нас как горизонтальная прямая $y = A$). Из определения предела ясно, что та самая точка, правее которой графики будут сливаться, имеет абсциссу p .

Если мы возьмём другой прибор, точность которого выше, т.е. у него ε меньше, чем у предыдущего прибора, то картина принципиально не изменится – правее некоторой точки графики $y = f(x)$ и $y = A$ всё равно будут сливаться в горизонтальную прямую $y = A$. Единственное отличие от предыдущего прибора будет заключаться в том, что это слияние графиков начнёт происходить на более правом участке, «позже», при больших значениях аргумента x .

Точно так же графически иллюстрируется существование предела $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = C$: график функции $y = g(x)$ имеет горизонтальную асимптоту $y = C$ при $x \rightarrow -\infty$. Или так: для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое действительное число p , что при всех $x \in (-\infty; p)$ график функции $y = g(x)$ полностью лежит внутри полосы между горизонтальными прямыми $y = C - \varepsilon$ и $y = C + \varepsilon$ (рис. 4.24).

Иногда разглядывание графика и обнаружение у него горизонтальных асимптот позволяет находить пределы соответствующей функции при $x \rightarrow +\infty$ или $x \rightarrow -\infty$.

Скажем, глядя на известный вам график функции $y = \frac{1}{x}$ (рис. 4.25) можно записать, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, а глядя на график функции $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 4.26), можно записать, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

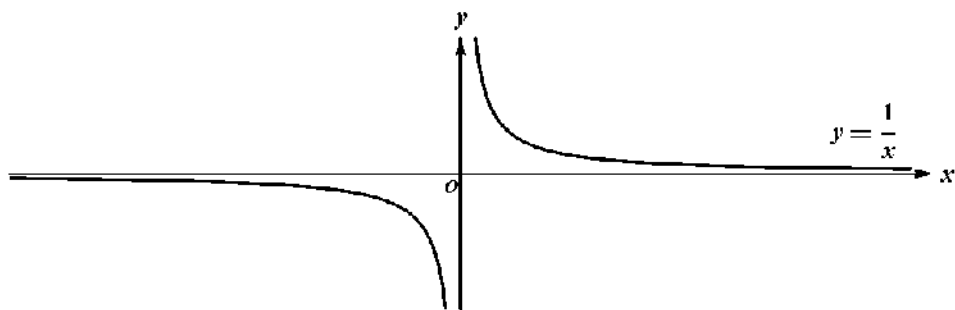


Рис. 4.25

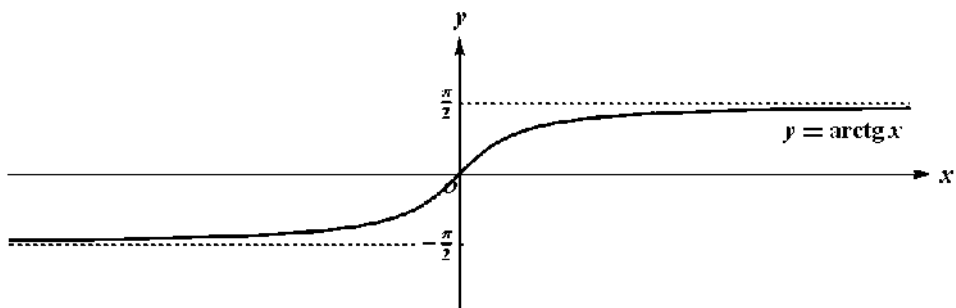


Рис. 4.26

Некоторые методы вычисления пределов мы рассмотрим в следующих параграфах.

Н

- 1 Нарисуйте в тетради таблицу значений функции $y = \frac{x+1}{x-1}$ и заполните её:

x	3	5	10	21	201	500	1000	1500	2001
$y = \frac{x+1}{x-1}$									

К какому значению стремится функция $y = \frac{x+1}{x-1}$ при неограниченном увеличении

аргумента? Чему равен $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1}$?

- 2 Имеет ли функция $y = \frac{x}{100000000} + 1$ предел при $x \rightarrow +\infty$? Аргументируйте свой ответ пользуясь определением предела.

3 Найдите такое наименьшее натуральное число p , что при всех $x > p$ верно неравенство $\left| \frac{x-1}{x+1} - 1 \right| < \frac{1}{1000}$.

4 Известно, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x^4}{1 + x^2 + 4x^4} = \frac{1}{2}$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 1}{x^2 + x^4} = 2$. Найдите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x^4}{1 + x^2 + 4x^4} + \frac{2x^4 - 1}{x^2 + x^4} \right)$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x^4}{1 + x^2 + 4x^4} - \frac{2x^4 - 1}{x^2 + x^4} \right)$

б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x^4}{1 + x^2 + 4x^4} \cdot \frac{x^2 + x^4}{2x^4 - 1}$; г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x^4}{2x^4 - 1} : \frac{1 + x^2 + 4x^4}{x^2 + 2x^4}$.

5 Верно ли равенство $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{2x+3} = 2$?

6 Докажите, пользуясь определением предела, что:

а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; д) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$;

б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$; г) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; е) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$.

7 а) Докажите, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x} = 2$;

б) Найдите горизонтальную асимптоту графика функции $y = \frac{2x+1}{x}$ при $x \rightarrow +\infty$;

в) Найдите такое действительное число p , что при всех $x > p$ ординаты графиков $y = \frac{2x+1}{x}$ и $y = 2$ отличаются менее, чем на 0,1; 0,01; 0,001.

8 а) Докажите, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{1+3x} = -\frac{1}{3}$;

б) Найдите горизонтальную асимптоту графика функции $y = \frac{1-x}{1+3x}$ при $x \rightarrow -\infty$;

в) Найдите такое действительное число p , что при всех $x < p$ ординаты графиков $y = \frac{1-x}{1+3x}$ и $y = -\frac{1}{3}$ отличаются менее, чем на 0,2; 0,03; 0,004.

9 а) Докажите, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 2$;

б) Найдите горизонтальную асимптоту графика функции $y = \frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ при $x \rightarrow +\infty$;

в) Найдите такое действительное число p , что при всех $x > p$ ординаты графиков $y = \frac{2\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ и $y = 2$ отличаются менее, чем на 0,01; 0,001; 0,0001.

10 а) Докажите, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-2}{3-2x} = -\frac{5}{2}$;

б) Найдите горизонтальную асимптоту графика функции $y = \frac{5x-2}{3-2x}$ при $x \rightarrow +\infty$;

в) Найдите такое действительное число p , что при всех $x > p$ ординаты графиков $y = \frac{5x-2}{3-2x}$ и $y = -\frac{5}{2}$ отличаются менее, чем на 0,5; 0,02; 0,005.

11 а) Докажите, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + \frac{2}{x^2}\right) = 3$;

б) Найдите горизонтальную асимптоту графика функции $y = 3 + \frac{2}{x^2}$ при $x \rightarrow -\infty$;

в) Найдите такое действительное число p , что при всех $x < p$ ординаты графиков $y = 3 + \frac{2}{x^2}$ и $y = 3$ отличаются менее, чем на 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001.

12 а) Докажите, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2-4x}{9x+10x^2} = \frac{1}{2}$;

б) Найдите горизонтальную асимптоту графика функции $y = \frac{5x^2-4x}{9x+10x^2}$ при $x \rightarrow +\infty$;

в) Найдите такое действительное число p , что при всех $x > p$ ординаты графиков $y = \frac{5x^2-4x}{9x+10x^2}$ и $y = \frac{1}{2}$ отличаются менее, чем на 0,1; 0,01; 0,001.

П

13 На рис. 4.27 приведены графики функций. Установите, имеют ли эти функции пределы при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$. Если да, найдите эти пределы. Если нет, объясните, почему.

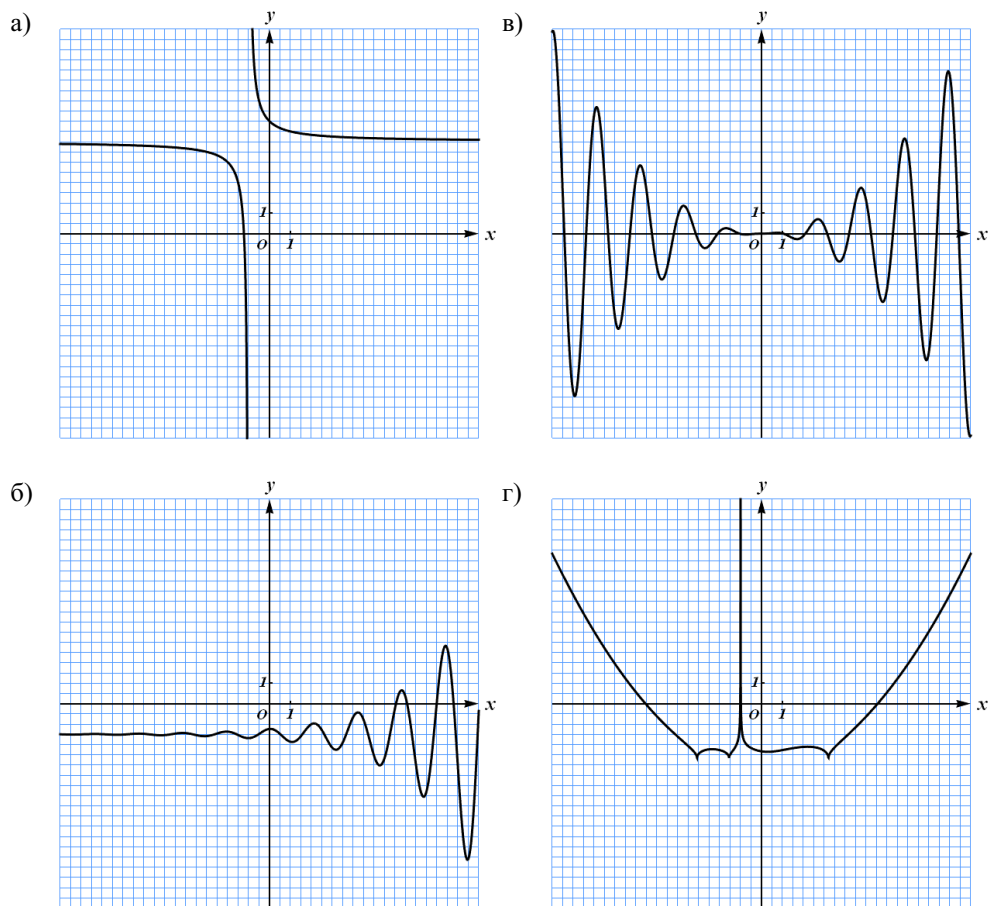


Рис. 4.27

14 На рис. 4.28 приведены графики функций. Установите, имеют ли эти функции пределы при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$. Если да, найдите эти пределы. Если нет, объясните, почему.

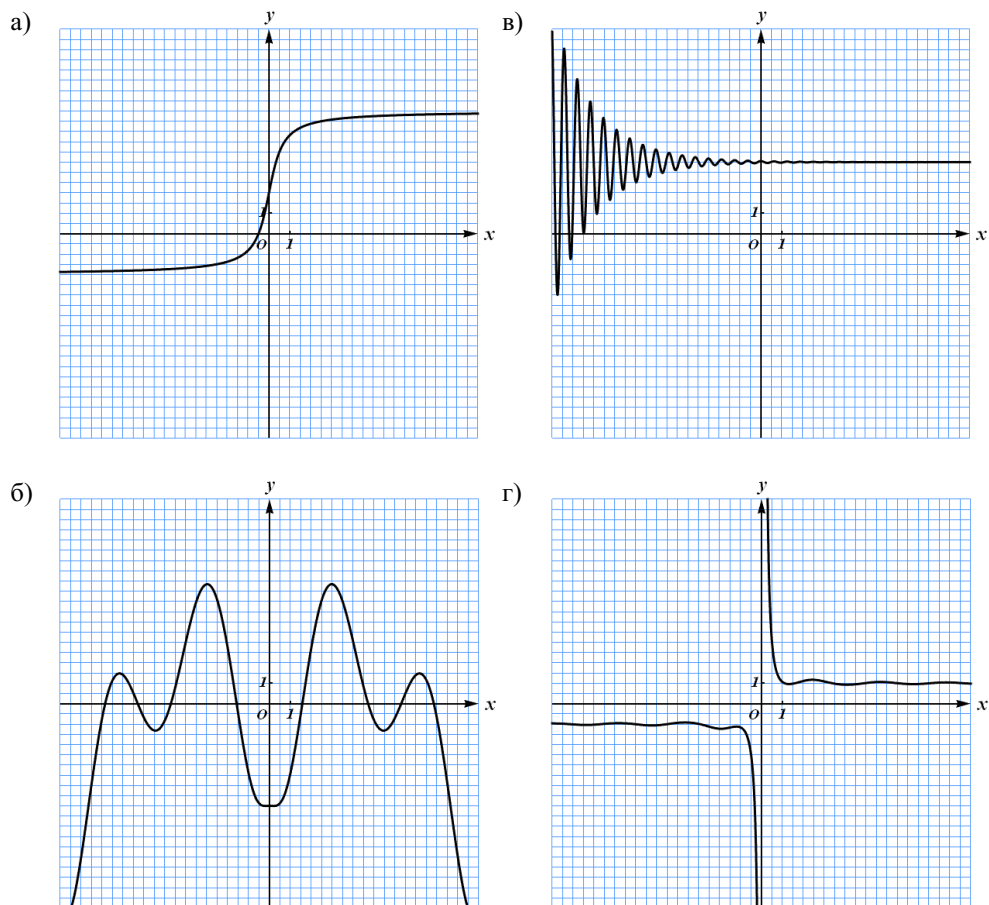


Рис. 4.28

15 Докажите верность равенств.

а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1;$

б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - x^2}{x + 3x^2} = -\frac{1}{3};$

в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2x}{x-1} \right) = 3;$

г) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4}{4x^4 + 3} = \frac{1}{2}.$

16 Докажите верность равенств.

а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 3}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$;

в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x - x^2} = -1$;

б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x - x^2} = -1$;

г) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{-x}}{3x} = \frac{2}{3}$.

17 Найдите пределы.

а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{3x + 2}$;

в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}$;

б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - 6x}{x + 1}$;

г) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$.

18 а) Докажите, что если существуют $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = B$, то существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x))$, причём $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = A - B$;

б) Докажите, что если существуют $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = B$, то существует $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x))$, причём $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = A - B$.

М

19 Докажите, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$ не существуют.

20 Докажите, что если $g(x)$ – периодическая функция, принимающая хотя бы два различных значения, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ не существуют.

21 а) Докажите теорему о единственности предела при $x \rightarrow +\infty$;

б) Докажите теорему о единственности предела при $x \rightarrow -\infty$.

22 а) Докажите, что если существуют $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = B$, то существует $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x))$, причём $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)g(x)) = AB$;

а) Докажите, что если существуют $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = B$, то существует $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)g(x))$, причём $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)g(x)) = AB$.

23 Докажите с помощью оси тангенсов, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

4.4. Понятие предела функции в точке

Как и в предыдущем параграфе, начнём с конкретного примера. Рассмотрим функцию $y = 2x + 1$. Область определения этой функции – множество всех действительных чисел: $D(y) = R$. Исследуем, как изменяются значения этой функции при неограниченном приближении её аргумента x к числу 1.

Составим таблицу значений функции $y = 2x + 1$ при нескольких значениях аргумента:

x	0,9	1,1	0,95	1,05	0,99	1,01	0,995	1,005	0,999	1,001	0,9999	1,0001
y	2,8	3,2	2,9	3,1	2,98	3,02	2,999	3,001	2,998	3,002	2,9998	3,0002

Мы видим, что при приближении значений аргумента x к числу 1 значения функции $y = 2x + 1$ приближаются к числу 3. Говорят также: при x , стремящемся к 1, y стремится к 3. Это можно записать следующим образом: $(2x + 1) \rightarrow 3$ при $x \rightarrow 1$.

Говорят также, что *предел* функции $y = 2x + 1$ при $x \rightarrow 1$ равен 3 и записывают это так: $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$. Так же, как и в предыдущем параграфе, в этом обозначении использованы начальные буквы слова «предел» на латыни (limes). Последняя запись читается одним из двух основных способов: «предел функции $2x + 1$ при x , стремящемся к 1, равен 3», или «предел функции $2x + 1$ в точке 1 равен 3».

Сразу обсудим следующий естественно возникающий вопрос. Раз значения аргумента x неограниченно приближаются к числу 1, раз x стремится к единице, то почему бы сразу не посмотреть, что будет, когда x достигнет наконец значения 1? Почему бы не подставить в формулу, задающую функцию, вместо x то число, к которому x стремится (в нашем случае, 1)?

Оказывается, есть такие функции, где так и можно поступить, а есть такие функции, где так поступать категорически нельзя. С ответом на этот вопрос мы разберёмся в следующем параграфе. К тому же бывают и такие функции, у которых то число, к которому неограниченно приближается их аргумент x , не входит в область определения, и мы при всём желании не сможем подставить его в формулу, задающую функцию. Но в то же время, соответствующие значения функции могут стремиться к вполне определённом числу, т.е. функция может иметь предел в такой точке.

Рассмотрим, к примеру, функцию $y = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$. Область определения этой функции – множество всех действительных чисел, кроме $x = 2$, т.е.

$D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Исследуем, как изменяются значения этой функции при неограниченном приближении её аргумента x к числу 2.

Составим таблицу значений функции $y = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ при нескольких значениях аргумента:

x	1,9	2,1	1,95	2,05	1,99	2,01	1,995	2,005	1,999	2,001	1,9999	2,0001
y	4,8	5,2	4,95	5,05	4,99	5,01	4,995	5,005	4,999	5,001	4,9999	5,0001

Мы видим, что при приближении значений аргумента x к числу 2 значения функции $y = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ приближаются к числу 5. Запишем это в виде: $\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} \rightarrow 5$

при $x \rightarrow 2$, или в виде $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$. В то же время при $x = 2$ функция

$$y = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} \text{ не определена.}$$

Какой же точный смысл вкладывается в слова «предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow m$ равен числу A » и соответственную запись $\lim_{x \rightarrow m} f(x) = A$?

Перед тем, как это обсуждать, рассмотрим очень простое и в то же время очень важное понятие *окрестности* точки на числовой прямой.

Окрестностью точки называется любой открытый интервал, т.е. интервал вида $(a; b)$, содержащий эту точку. Окрестности точки m будем обозначать $U(m)$, $V(m)$, и т.д. В некоторых случаях удобно рассматривать такую окрестность точки m , у которой эта точка является серединой (или центром), т.е. интервал вида $(m-r; m+r)$, где r – положительное число, называемое радиусом окрестности.

Такая окрестность иногда обозначается $U_r(m)$ и называется r -окрестностью точки m . Наконец, поскольку при нахождении предела функции в точке m не предполагается, что функция определена в точке m , вводится понятие *проколотой окрестности* точки m . Это такая окрестность точки m , из которой удалена сама точка m . Проколотая окрестность точки m обозначается $\overset{\circ}{U}(m)$, а проколотая r -окрестность – $\overset{\circ}{U}_r(m)$.

Можно записать, что $\overset{\circ}{U}(m) = (a; m) \cup (m; b)$, $\overset{\circ}{U}_r(m) = (m-r; m) \cup (m; m+r)$.

Итак, какой точный смысл вкладывается в слова «предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow m$ равен числу A » и соответственную запись $\lim_{x \rightarrow m} f(x) = A$?

Этот смысл таков: Какое бы малое положительное число ε мы не взяли, можно указать такую проколотую окрестность точки m , что при всех значениях аргумента, принадлежащих этой проколотой окрестности, значения функции отличаются от числа A меньше, чем на это положительное число ε .

Таким образом, мы приходим к следующему определению предела функции $f(x)$ при $x \rightarrow m$.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow m$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую проколотую окрестность точки m , что при всех x , принадлежащих этой проколотой окрестности, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Предел функции при $x \rightarrow m$ называется *пределом функции в точке* (имеется в виду точка m), а изученные в предыдущем параграфе пределы функции при $x \rightarrow +\infty$ и при $x \rightarrow -\infty$ называются *пределами на бесконечности*.

Доказательство того факта, что предел данной функции при $x \rightarrow m$ равен данному числу, в большинстве случаев – весьма непростая задача. Обычно это доказательство заметно сложнее, чем доказательство для ситуаций предела на бесконечности, т.е. при $x \rightarrow +\infty$ или при $x \rightarrow -\infty$.

К решению этой задачи обычно применяется такой же подход, как описанный в предыдущем параграфе для случая $x \rightarrow +\infty$. Мы выписываем неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ и пытаемся доказать, что множество его решений содержит некоторую проколотую окрестность точки m . В несложных случаях неравенство удаётся попросту решить, а в сложных, когда решить его невозможно, приходится применять разного вида оценочные рассуждения.

Докажем, что предел, с рассмотрения которого мы начали данный параграф, действительно равен 3, т.е. $\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$.

Неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ для данного случая имеет вид $|(2x + 1) - 3| < \varepsilon$, или $|2x - 2| < \varepsilon$, или $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$. Здесь тот самый случай, когда неравенство легко решается:

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < x - 1 < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 1 + \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow x \in \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}; 1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \Leftrightarrow x \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(1).$$

Таким образом, множеством решений неравенства $|f(x) - A| < \varepsilon$, т.е. неравенства $|(2x + 1) - 3| < \varepsilon$, оказалась $\frac{\varepsilon}{2}$ -окрестность точки 1 (даже не проколотая).

Ясно, что при всех $x \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}(1)$, а значит, и при всех $x \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\circ}(1)$, будет выполняться неравенство $|(2x+1)-3| < \varepsilon$, а по определению предела, это и значит, что $\lim_{x \rightarrow 1} (2x+1) = 3$.

Обратите внимание, что в рассмотренном примере нам удалось явно выразить границы окрестности через ε . Определение предела вовсе не предполагает такого выражения. Нужно лишь установить, что такая проколота окрестность *может быть найдена* для любого $\varepsilon > 0$. Явно выразить границы этой проколотой окрестности через ε удастся лишь при нахождении самых простых пределов.

Найдём ещё несколько пределов функции в точке.

Предел постоянной в любой точке равен самой этой постоянной.

Это значит, что при любом действительном m у функции $y = A$, где A – действительное число, предел равен A , т.е. $\lim_{x \rightarrow m} A = A$.

Для доказательства заметим, что неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ для данного случая при любом x имеет вид $|A - A| < \varepsilon$, т.е. справедливо при любом действительном x , в том числе в любой проколотой окрестности любой точки m .

При любом действительном m справедливо соотношение: $\lim_{x \rightarrow m} x = m$.

Для доказательства заметим, что неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ для данного случая имеет вид $|x - m| < \varepsilon$, или $m - \varepsilon < x < m + \varepsilon$. Но последнее неравенство задаёт ε -окрестность точки m (даже не проколотую). Ясно, что в этой окрестности, т.е. при всех $x \in U_{\varepsilon}(m)$ справедливо нужное нам неравенство $|x - m| < \varepsilon$. И тем самым доказано, что $\lim_{x \rightarrow m} x = m$.

Иногда находить пределы можно с помощью геометрических соображений. Докажем, например, что $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

Возьмём $\varepsilon > 0$. Неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, с которым мы работаем, в данном случае имеет вид $|\cos x - 1| < \varepsilon$, или $1 - \varepsilon < \cos x < 1 + \varepsilon$. Поскольку правое неравенство при $\varepsilon > 0$ автоматически выполнено, займёмся левым неравенством.

Нарисуем тригонометрическую окружность, отметим на оси абсцисс точку $1 - \varepsilon$ и проведём через неё перпендикулярную оси абсцисс прямую до пересечения с окружностью в точках α и $-\alpha^*$ (рис. 4.29).

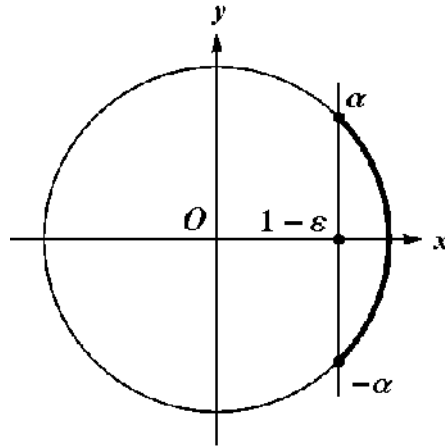


Рис. 4.29

Закрашенная дуга тригонометрической окружности соответствует окрестности $U_\alpha(0)$ точки 0, и тем самым установлено, что при всех $x \in U_\alpha(0)$ выполняется неравенство $1 - \varepsilon < \cos x$, а значит, и неравенство $|\cos x - 1| < \varepsilon$. Итак, доказано, что $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

Заметим, что похожими рассуждениями можно находить и некоторые другие тригонометрические пределы.

Свойства пределов функции в точке аналогичны свойствам пределов на бесконечности.

Прежде всего справедлива теорема о единственности предела при $x \rightarrow m$:

Если функция $f(x)$ имеет предел в точке, то этот предел единственный.

По-другому: Функция не может иметь двух различных пределов в данной точке.

* Заметим, хотя при доказательстве нам это и не понадобится, что на рис. 4.29 $\alpha = \arccos(1 - \varepsilon)$.

Справедливы теоремы о пределах суммы, разности, произведения и частного функций, имеющих пределы в одной и той же точке:

Пусть существуют $\lim_{x \rightarrow m} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow m} g(x) = B$. Тогда:

- 1) существует $\lim_{x \rightarrow m} (f(x) + g(x))$, причём $\lim_{x \rightarrow m} (f(x) + g(x)) = A + B$;
- 2) существует $\lim_{x \rightarrow m} (f(x) - g(x))$, причём $\lim_{x \rightarrow m} (f(x) - g(x)) = A - B$;
- 3) существует $\lim_{x \rightarrow m} (f(x) g(x))$, причём $\lim_{x \rightarrow m} (f(x) g(x)) = AB$;
- 4) если $B \neq 0$, то существует $\lim_{x \rightarrow m} \frac{f(x)}{g(x)}$, причём $\lim_{x \rightarrow m} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

Кратко эти теоремы выражают фразами: «предел суммы равен сумме пределов», «предел разности равен разности пределов», «предел произведения равен произведению пределов», «предел частного равен частному пределов, при условии, что предел делителя отличен от нуля».

Докажем теорему для суммы пределов.

Возьмём любое $\varepsilon > 0$ и докажем, что можно найти такую проколотую окрестность точки m , что при всех значениях аргумента, принадлежащих этой проколотой окрестности, выполняется неравенство: $|(f(x) + g(x)) - (A + B)| < \varepsilon$.

Мы знаем, что $\lim_{x \rightarrow m} f(x) = A$. Возьмём число $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Для него существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(m)$ точки m , что при всех $x \in \overset{\circ}{U}(m)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Мы знаем также, что $\lim_{x \rightarrow m} g(x) = B$. Опять возьмём число $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Для него существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{V}(m)$ точки m , что при всех $x \in \overset{\circ}{V}(m)$ выполняется неравенство $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$.

В дальнейшем рассуждении центральную роль играет следующее практически очевидное утверждение: пересечение проколотых окрестностей одной и той же точки само является проколотой окрестностью той же точки.

Рассмотрим пересечение проколотых окрестностей $\overset{\circ}{U}(m)$ и $\overset{\circ}{V}(m)$. Оно является некоторой проколотой окрестностью $\overset{\circ}{W}(m)$ точки m . В этой проколотой окрестности

будут выполняться оба неравенства $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$. Дальнейшее рассуждение такое же, как в аналогичной теореме о пределе суммы на бесконечности:

$$|(f(x) + g(x)) - (A + B)| = |(f(x) - A) + (g(x) - B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, взяв любое $\varepsilon > 0$, мы нашли такую проколотую окрестность $\overset{\circ}{W}(m)$ точки m , что при всех $x \in \overset{\circ}{W}(m)$ выполняется неравенство:

$$|(f(x) + g(x)) - (A + B)| < \varepsilon.$$

Тем самым мы доказали, что $\lim_{x \rightarrow m} (f(x) + g(x)) = A + B$.

Сформулированные выше теоремы позволяют вычислять многие пределы.

Например, вычислим предел: $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 7x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 7x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2} (7x) = \left(\lim_{x \rightarrow 2} x\right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 2} x\right) - \left(\lim_{x \rightarrow 2} 7\right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 2} x\right) = 2 \cdot 2 - 7 \cdot 2 = -10.$$

Сформулируем и докажем ещё одну важную теорему, называемую *теоремой о трёх пределах*:

Пусть имеется интервал $(a; b)$ и точка $m \in (a; b)$. Если функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ таковы, что во всех точках интервала $(a; b)$, кроме возможно точки m , выполняется неравенство $f(x) < g(x) < h(x)$, и при этом в точке m существуют пределы крайних функций $f(x)$ и $h(x)$, равные одному и тому же числу, то в этой точке существует также предел промежуточной функции $g(x)$, причём он равен тому же числу.

Пусть $\lim_{x \rightarrow m} f(x) = \lim_{x \rightarrow m} h(x) = A$. Докажем, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = A$.

Возьмём любое $\varepsilon > 0$.

Поскольку $\lim_{x \rightarrow m} f(x) = A$, существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(m)$ точки m , что при всех $x \in \overset{\circ}{U}(m)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, которое нам удобно переписать в виде: $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Аналогично, поскольку $\lim_{x \rightarrow m} h(x) = A$, существует такая проколотая окрестность $\overset{\circ}{V}(m)$ точки m , что при всех $x \in \overset{\circ}{V}(m)$ выполняется неравенство $|h(x) - A| < \varepsilon$, которое запишем в виде: $A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon$.

Рассмотрим пересечение проколотых окрестностей $\overset{\circ}{U}(m)$ и $\overset{\circ}{V}(m)$. Оно является некоторой проколотой окрестностью $\overset{\circ}{W}(m)$ точки m . В этой проколотой окрестности будут выполняться оба неравенства $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ и $A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon$, а значит, с учётом данного в условии неравенства $f(x) < g(x) < h(x)$, получим:

$$A - \varepsilon < f(x) < g(x) < h(x) < A + \varepsilon, \text{ или } A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon, \text{ или } |g(x) - A| < \varepsilon.$$

Итак, взяв любое $\varepsilon > 0$, мы нашли такую проколотую окрестность $\overset{\circ}{W}(m)$ точки m , что при всех $x \in \overset{\circ}{W}(m)$ выполняется неравенство $|g(x) - A| < \varepsilon$.

Тем самым мы доказали, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = A$.

Ещё одну теорему, называемую *теоремой о переходе к пределу в неравенстве*, мы сформулируем без доказательства – оно очень похоже на только что рассмотренное. Желающие могут провести его самостоятельно.

Пусть имеется интервал $(a; b)$ и точка $m \in (a; b)$. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что во всех точках интервала $(a; b)$, кроме возможно точки m , выполняется неравенство $f(x) < g(x)$, и при этом в точке m существуют пределы $\lim_{x \rightarrow m} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow m} g(x) = B$, то $A \leq B$.

Можно сказать так: для пределов выполняется неравенство такого же вида, как и для функций, только строгое неравенство для функций может перейти в нестрогое для пределов.

Рассмотрим ещё одно важное понятие – *односторонние пределы* функции в точке. Сначала определим левую и правую полуокрестности точки. Пусть r – произвольное положительное число.левой полуокрестностью точки m называется любой интервал вида $(m - r; m)$, а правой полуокрестностью – любой интервал вида $(m; m + r)$.

Если в определении предела слова «проколотую окрестность точки m » заменить словами «левую полуокрестность точки m », то получим определение левостороннего предела функции в точке m (говорят ещё «при x , стремящемся к m слева»), а если словами «правую полуокрестность точки m », то получим определение правостороннего предела функции в точке m (говорят ещё «при x , стремящемся к m справа»).

Подробнее:

Мы говорим, что число A является левосторонним пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow m$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую левую полуокрестность точки m , что при всех x , принадлежащих этой левой полуокрестности, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Поскольку для всех точек x левой полуокрестности точки m выполняется неравенство $x < m$, левосторонний предел функции $f(x)$ в точке m (при $x \rightarrow m$ слева), обозначается следующим образом: $\lim_{\substack{x \rightarrow m \\ x < m}} f(x) = A$.

Аналогично:

Мы говорим, что число A является правосторонним пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow m$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую правую полуокрестность точки m , что при всех x , принадлежащих этой правой полуокрестности, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Для правостороннего предела функции $f(x)$ в точке m (при $x \rightarrow m$ справа) применяется запись: $\lim_{\substack{x \rightarrow m \\ x > m}} f(x) = A$.

Общее название левостороннего и правостороннего пределов – односторонние пределы. Для односторонних пределов справедливы теоремы о пределах суммы, разности, произведения и частного функций, а также остальные теоремы, аналогичные рассмотренным выше теоремам для пределов

Имеет место следующая теорема:

Функция имеет предел в точке в том и только том случае, когда она имеет в этой точке оба односторонних предела, причём они равны между собой.

В заключение этого параграфа докажем очень важное неравенство, а затем с его помощью вычислим предел, имеющий первостепенное значение в курсе математического анализа.

Для любого действительного числа $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ справедливо неравенство:
$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Напомним, что синусом действительного числа x называется синус угла с радианной мерой x . На рис. 4.30 изображена тригонометрическая окружность с отложенным углом x (радианная мера дуги AB равна x). Т.к. точка C лежит на оси тангенсов, то $BC = \operatorname{tg} x$.

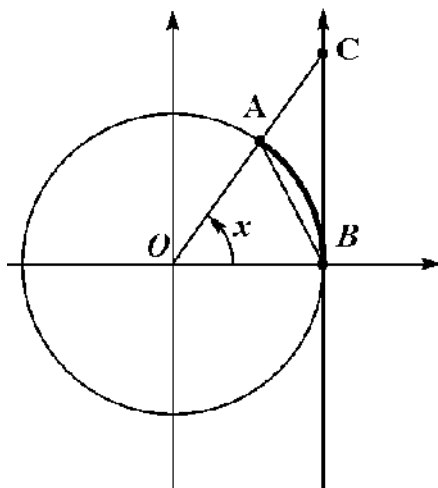


Рис. 4.30

Из геометрических соображений понятно, что площадь сектора с дугой AB больше площади треугольника OAB и меньше площади треугольника OCB (поскольку сектор содержит первый треугольник и содержится во втором).

Поскольку окружность единичная, площадь сектора равна $\frac{1}{2} OA^2 \cdot x = \frac{1}{2} x$. Площадь

треугольника OAB равна $\frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin x = \frac{1}{2} \sin x$, а площадь треугольника OCB равна

$\frac{1}{2} OB \cdot CB = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$. Таким образом можно записать, что $\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$, откуда и получаем доказываемое неравенство $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Замечание 1. Поскольку все функции входящие в доказанное неравенство являются нечётными, из него следует, что при любом $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

справедливо неравенство $|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$, а при любом $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ – неравенство $|\sin x| \leq |x| \leq |\operatorname{tg} x|$.

Замечание 2. Можно доказать, что неравенство $\sin x < x$ справедливо для всех положительных действительных чисел x , а неравенство $|\sin x| \leq |x|$ – для всех действительных чисел x .

Основываясь на доказанном неравенстве, докажем, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Этот предел настолько важен в курсе математического анализа, что его называют *первым замечательным пределом*^{*}.

Мы знаем, что для любого действительного числа $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ справедливо неравенство: $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Поскольку $\sin x > 0$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то разделив наше неравенство на положительное число $\sin x$, получим: $\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$, или $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$. Поскольку все входящие в полученное неравенство числа положительные, перепишем его в виде: $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Поскольку обе функции $y = \cos x$ и $y = \frac{\sin x}{x}$ чётные, то это неравенство справедливо также и для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Теперь мы оказываемся в условиях теоремы о трёх пределах. Во всех точках интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, кроме точки 0, выполнено неравенство $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$. Как мы доказали выше в данном параграфе, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$. Отсюда получаем требуемое: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

^{*} В учебнике алгебры и математического анализа для 11 класса вы познакомитесь также со вторым замечательным пределом.

Н

- 1 Начертите в тетради таблицу значений для функции $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ и заполните её:

x	-1,1	-0,9	-1,01	-0,99	-1,001	-0,999	-1,0001	-0,9999
$y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$								

К какому значению стремится функция $y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ при $x \rightarrow -1$ слева и справа? Чему равно значение предела функции y в точке $x = -1$?

- 2 Найдите проколотую окрестность точки $x = 2$, внутри которой справедливо неравенство $|y - 1| < \frac{1}{10}$ для функции $y = x^2 - 4x + 5$.

- 3 Докажите, используя определение предела функции в точке, что:

- а) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$; в) $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = -1$;
б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$; г) $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \cos x = 1$.

- 4 Известно, что $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = b$. Найдите пределы:

- а) $\lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) - 3g(x))$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{f(x)} + \frac{1}{g(x)} \right)$;
б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 2g(x)}{3f(x) - g(x)}$; г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{2f(x) + 1} \cdot \frac{2g(x) - 2}{f(x)}$.

- 5 Известно, что существует предел слева функции $f(x)$ в точке $x = 0$, а также то, что функция $f(x)$ является чётной. Верно ли, что существует $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

- 6 Известно, что $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = a$ и $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = a$, а также известно, что при $-22 < x < 14$ справедливо неравенство $f(x) < h(x) < g(x)$. Найдите $\lim_{x \rightarrow -3} h(x)$.

- 7 Какие из следующих равенств верные?

- а) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x - 1}{2x + 1} \cdot \frac{2x + 1}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x - 1}{2x + 1} \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x + 1}{2x - 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} 1 - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 1}$;
б) $\lim_{x \rightarrow 3} (3x^2 - 5x + 1) = \lim_{x \rightarrow 3} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow 3} 5x + \lim_{x \rightarrow 3} 1$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x}{\lim_{x \rightarrow 0} x}$.

8 Докажите, пользуясь определением предела, что:

а) $\lim_{x \rightarrow 3} (x+6) = 9$; в) $\lim_{x \rightarrow 5} (2x+3) = 13$; д) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{7}} (2-7x) = 1$;
б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$; г) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+3}{2x} = -1$; е) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3}{x+2} = \frac{1}{2}$.

9 а) Докажите, что $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x} = 2$;

б) Найдите такую проколотую окрестность точки 2, во всех точках которой график $y = \frac{x+2}{x}$ отличается от графика $y = 2$ менее, чем на 0,1; 0,01; 0,001.

10 а) Докажите, что $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x+4}{2x+1} = 3$;

б) Найдите такую проколотую окрестность точки $\frac{1}{3}$, во всех точках которой график $y = \frac{3x+4}{2x+1}$ отличается от графика $y = 3$ менее, чем на 0,1; 0,01; 0,001.

11 а) Докажите, что $\lim_{x \rightarrow 4} (2\sqrt{x}-3) = 1$;

б) Найдите такую проколотую окрестность точки 4, во всех точках которой график $y = 2\sqrt{x}-3$ отличается от графика $y = 1$ менее, чем на 0,1; 0,01; 0,001.

12 Найдите пределы.

а) $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + x - 2)$; в) $\lim_{x \rightarrow 10} (x^2 - 9x + 10)$; д) $\lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x+7} - \sqrt{x})$;
б) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x} + x + 1 \right)$; г) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left(3x + \frac{1}{x} + 9x^2 \right)$; е) $\lim_{x \rightarrow 1} (5x^5 + 4x^4)$.

13 Найдите пределы.

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3}{3x - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + x^2}{x^2 + x + 2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{2x + 4x^2 - 1}{4x + 3}$;
б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}}{4-x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{5x} + x}{10x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 10} \frac{2x^3 + 1}{2010 - 2x^3}$.

14 Найдите пределы.

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{5x-10}$; в) $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{5}} \frac{15+25x}{6+10x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \frac{10}{3}} \frac{3x-10}{12x-40}$;
б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{16+16x}{12x+12}$; г) $\lim_{x \rightarrow -\frac{4}{3}} \frac{20+15x}{12x+16}$; е) $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} \frac{2x-5}{15-6x}$.

15 Найдите пределы.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - \sin 2x}{2x \cos 3x}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x \cos x}$.

16 Найдите пределы.

а) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2+2x}{2+6x+4x^2}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-4x+2}{2x^2-5x+3}$;

д) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-2x}{6-6x}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2-6x}{4x^2+2x}$;

г) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2-1-x}{1-4x^2}$;

е) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+6x+8}{6x+10}$.

II

17 На рис. 4.31 приведены графики функций. Установите, имеют ли эти функции пределы при $x \rightarrow 2$ и при $x \rightarrow -3$. Если нет, объясните, почему. Если да, найдите эти пределы.

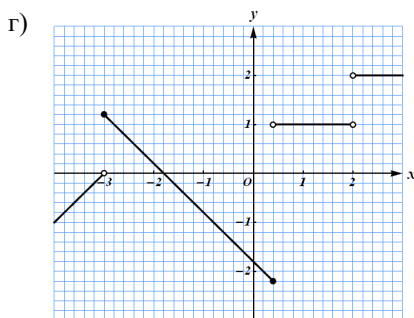
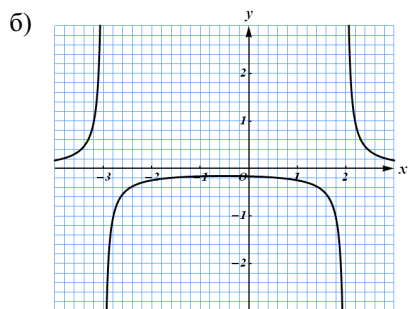
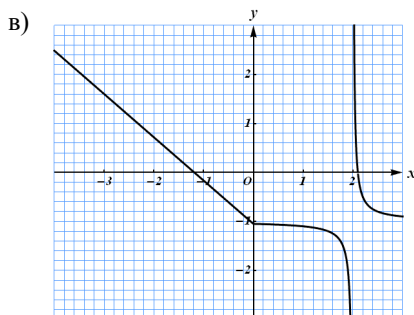
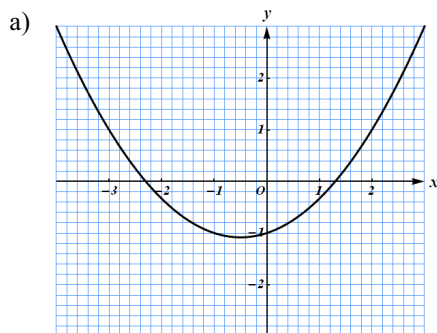


Рис. 4.31

18) На рис. 4.32 приведены графики функций. Установите, имеют ли эти функции пределы при $x \rightarrow 0$. Если да, найдите эти пределы. Если нет, объясните, почему.

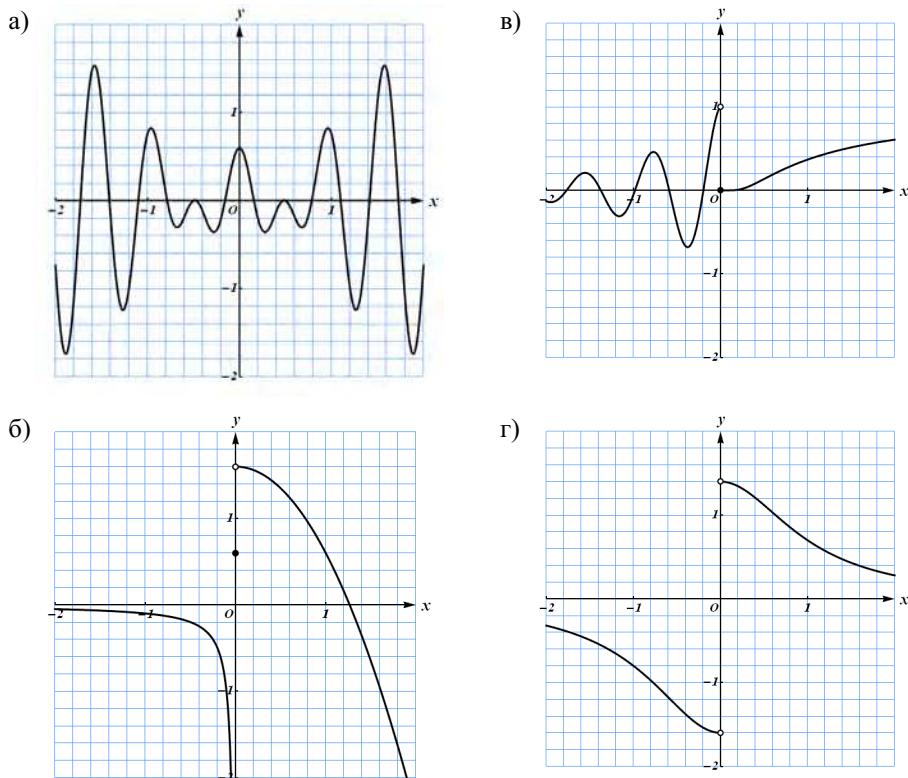


Рис. 4.32

19) Докажите верность равенств с помощью определения предела функции в точке.

- а) $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{x} = 1$;
 б) $\lim_{x \rightarrow 4} (2x - 3) = 5$; г) $\lim_{x \rightarrow 3} x^4 = 81$.

20) Докажите верность равенств с помощью определения предела функции в точке.

- а) $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = 2$; в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2}{1-x} = \frac{1}{2}$;
 б) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x) = 0$; г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \cos x = \frac{1}{2}$.

21) а) Докажите, что если существуют $\lim_{x \rightarrow m} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow m} g(x) = B$, то существует $\lim_{x \rightarrow m} (f(x) - g(x))$, причём $\lim_{x \rightarrow m} (f(x) - g(x)) = A - B$;

б) Докажите, что если существуют $\lim_{\substack{x \rightarrow m \\ x < m}} f(x) = A$ и $\lim_{\substack{x \rightarrow m \\ x < m}} g(x) = B$, то существует $\lim_{\substack{x \rightarrow m \\ x < m}} (f(x) - g(x))$, причём $\lim_{\substack{x \rightarrow m \\ x < m}} (f(x) - g(x)) = A - B$.

22) Докажите теорему о трёх пределах:

а) для левостороннего предела; б) для правостороннего предела.

23) Докажите теорему о переходе к пределу в неравенстве.

М

24) Докажите, что $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ не существует.

25) а) Докажите теорему о единственности предела при $x \rightarrow m$;

б) Докажите теорему о единственности односторонних пределов в точке.

26) Докажите, что если существуют $\lim_{x \rightarrow m} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow m} g(x) = B$, то существует $\lim_{x \rightarrow m} (f(x)g(x))$, причём $\lim_{x \rightarrow m} (f(x)g(x)) = AB$;

27) Докажите с помощью оси тангенсов, что $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x = 0$.

4.5. Непрерывность функции в точке

В предыдущем параграфе мы говорили, что при вычислении предела функции в точке иногда можно найти предел, подставив эту точку в формулу, задающую функцию, а иногда так поступать нельзя. Из двух первых рассмотренных в

параграфе 4.4 пределов, $\lim_{x \rightarrow 1} (2x+1) = 3$ и $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$, первый можно найти

таким образом, а второй – нельзя.

Введём такое определение

Функция называется *непрерывной в точке*, если она имеет предел в этой точке, который равен её значению в этой точке.

Это можно записать так: $\lim_{x \rightarrow m} f(x) = f(m)$.

Обратите внимание, для того, чтобы можно было говорить о непрерывности функции в точке, она должна иметь в этой точке значение, или по-другому, должна быть определённой в этой точке.

Доказанное в предыдущем параграфе утверждение, что при любом действительном m функция $y = A$, где A – действительное число, имеет предел, равный A , т.е. $\lim_{x \rightarrow m} A = A$, позволяет утверждать, что функция $y = A$ является непрерывной в любой точке m .

Точно так же, доказанное в предыдущем параграфе утверждение, что при любом действительном m справедливо соотношение $\lim_{x \rightarrow m} x = m$ позволяет утверждать, что функция $y = x$ непрерывна в любой точке.

Вычисление пределов для непрерывных функций является очень простой задачей, поскольку сводится к вычислению их значений в тех точках, в которых ищется предел.

Название «непрерывная функция» объясняется тем, что график функции, непрерывной во всех точках некоторого интервала, является непрерывной линией, т.е. его можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги (мела от доски, и т.д.).

Разберёмся с этим подробнее. Заодно мы освоим некоторые важные понятия и обозначения, которые будут неоднократно использоваться в дальнейшем.

Пусть функция $y = f(x)$ определена во всех точках некоторого интервала $(a; b)$ и x_0 – любая точка этого интервала. Эта точка обычно воспринимается как начальная точка. Рассмотрим в интервале $(a; b)$ любую другую точку x . Разность $x - x_0$ принято называть *приращением аргумента* и обозначать Δx (обратите внимание, это неделимый символ, не надо его воспринимать как произведение некоторой буквы Δ на x , он должен восприниматься как единое целое): $\Delta x = x - x_0$. При этом может быть $\Delta x > 0$ и $\Delta x < 0$, т.е. приращение аргумента может иметь любой знак*. Поскольку $x = x_0 + \Delta x$, то это обстоятельство обычно воспринимается так: у нас было начальное значение аргумента x_0 , мы изменили его на Δx и получили новое значение аргумента x .

При переходе от значения аргумента x_0 к значению аргумента $x = x_0 + \Delta x$ значение функции тоже изменилось: было $f(x_0)$, а стало $f(x_0 + \Delta x)$.

* Заметим, что название «приращение аргумента» возможно не очень удачное, т.к. вызывает невольные ассоциации с увеличением аргумента. По-видимому, более удачным названием было бы «изменение аргумента», но по установившейся традиции употребляется именно название «приращение аргумента» с комментарием, что оно может быть и положительным, и отрицательным.

Разность $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется *приращением функции* (соответствующим приращению аргумента Δx) и обозначается Δy :

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

При этом фраза, стоящая в скобках, всегда подразумевается, но для краткости почти никогда не произносится. Поскольку мы имеем дело с функцией $y = f(x)$, то её приращение иногда обозначают также Δf .

Приращение функции тоже может иметь любой знак, может быть $\Delta y > 0$ и $\Delta y < 0$. Может быть также $\Delta y = 0$.

Иллюстрация приведена на рис. 4.33, где $\Delta x > 0$ и $\Delta y > 0$.

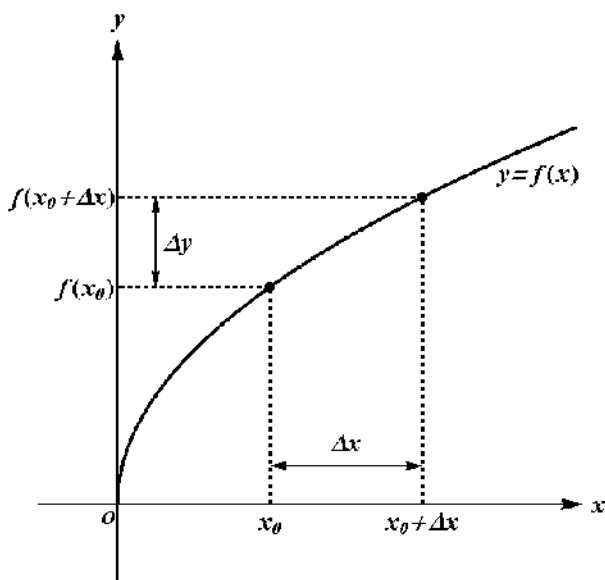


Рис. 4. 33

Предположим, что функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 , т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Попробуем переписать это равенство с помощью рассмотренных понятий «приращение аргумента» и «приращение функции» (принято говорить: на языке приращений).

Во-первых, т.к. $\Delta x = x - x_0$, то $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow (x - x_0) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \Delta x \rightarrow 0$.

Во-вторых, поскольку $f(x_0)$ – постоянная, а предел постоянной равен ей самой, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = f(x_0)$ и по теореме о пределе разности:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0.$$

Но у нас $x = x_0 + \Delta x$, значит, $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$.

Таким образом, получаем; $\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta y = 0$, или, поскольку выше показано, что $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \Delta x \rightarrow 0$, это равносильно тому, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

Мы доказали, таким образом, следующую равносильность:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Это позволяет дать другое, равносильное предыдущему, определение непрерывности функции:

Функция называется непрерывной в точке, если при стремлении к нулю приращения аргумента в этой точке соответствующее приращение функции тоже стремится к нулю.

Это можно записать так: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, или так: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$, или так; $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$.

Это же можно выразить совсем простыми словами: малому приращению функции соответствует малое приращение аргумента. Именно это ассоциируется с непрерывным рисованием линии (графика функции).

На практике устанавливать непрерывность функции обычно проще с помощью второго определения (на языке приращений).

Используя понятие односторонних пределов, можно рассмотреть понятие односторонней непрерывности функции в точке.

Функция называется непрерывной слева в точке, если она имеет левосторонний предел в этой точке, который равен её значению в этой точке.

Это можно записать так: $f(x)$ непрерывна слева в точке $m \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow m \\ x < m}} f(x) = f(m)$.

Функция называется непрерывной справа в точке, если она имеет правосторонний предел в этой точке, который равен её значению в этой точке.

Запись следующая: $f(x)$ непрерывна справа в точке $m \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow m \\ x > m}} f(x) = f(m)$.

Из свойств односторонних пределов вытекает также следующая теорема:

Функция непрерывна в точке тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке и слева, и справа.

Доказанные в предыдущем параграфе теоремы о пределах суммы, разности, произведения и частного функций, имеющих пределы в одной и той же точке, позволяют утверждать следующее:

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке m . Тогда:

1) сумма, разность и произведение этих функций тоже непрерывны в точке m ;

2) если $g(m) \neq 0$, то функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке m .

То же самое можно утверждать и для односторонней непрерывности.

Рассмотрим вопрос о непрерывности основных известных нам функций

При любом натуральном n функция $y = x^n$ непрерывна во всех точках.

Действительно, в начале этого параграфа было установлено, что функция $y = x$ непрерывна во всех точках. Поскольку при $n > 1$ выражение x^n представляет собой произведение n сомножителей, каждый из которых равен x , то функция $y = x^n$ непрерывна по теореме о непрерывности произведения непрерывных функций.

Многочлен является непрерывной функцией во всех точках.

Поскольку мы уже знаем, что функции $y = A$ (где A – постоянная) и $y = x^n$ непрерывны во всех точках, то функция $y = Ax^n$ (т.е. одночлен) тоже непрерывна во всех точках по теореме о непрерывности произведения непрерывных функций. А поскольку многочлен является алгебраической суммой одночленов, то по теореме о непрерывности суммы и разности непрерывных функций он тоже непрерывен во всех точках.

Перед формулировкой следующей теоремы напомним, что частное двух многочленов называется дробно-рациональной функцией.

Дробно-рациональная функция непрерывна во всех точках своей области определения, т.е. во всех точках, в которых её знаменатель не обращается в нуль.

Доказательство следует из теоремы о непрерывности частного непрерывных функций с учётом того, что числитель и знаменатель непрерывны как многочлены.

Гораздо сложнее устанавливается непрерывность тригонометрических функций. Начнём с такой теоремы.

Функция $y = \sin x$ непрерывна во всех точках.

Рассмотрим произвольное действительное число x_0 и докажем, что функция $y = \sin x$ непрерывна в точке x_0 . Возьмём приращение аргумента Δx в точке x_0 и рассмотрим соответствующее ему приращение функции Δy , преобразовав его по формуле разности синусов:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Докажем по определению предела, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$. Возьмём любое $\varepsilon > 0$. Выпишем интересующее нас неравенство $|\Delta y - 0| < \varepsilon$ и начнём преобразовывать его левую часть:

$$|\Delta y| = \left| 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| = 2 \cdot \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right| \cdot \left| \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq 2 \cdot \left| \frac{\Delta x}{2} \right| \cdot 1 = |\Delta x|.$$

Мы воспользовались тем, что для любого действительного числа x справедливы неравенства $|\sin x| \leq |x|$ и $|\cos x| \leq 1$.

Отсюда видно, что неравенство $|\Delta y - 0| < \varepsilon$ будет выполняться при $|\Delta x| < \varepsilon$, т.е. для всех $\Delta x \in U_\varepsilon(0)$, а значит и для всех $\Delta x \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(0)$, и таким образом, доказано, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, а это значит, что функция $y = \sin x$ непрерывна в любой точке x_0 .

Аналогичным рассуждением устанавливается непрерывность косинуса.

Поскольку тангенс – частное синуса и косинуса, а котангенс – частное косинуса и синуса, то их непрерывность (в тех точках, где они определены) следует из теоремы о непрерывности частного непрерывных функций.

Тригонометрические функции непрерывны во всех точках своей области определения.

Имеет место теорема о непрерывности обратной функции.

Если возрастающая (убывающая) функция $y = f(x)$, областью определения которой является интервал $(a; b)$, а областью значений – интервал $(c; d)$, непрерывна во всех точках интервала $(a; b)$, то существует обратная функция $y = f^{-1}(x)$, которая тоже является возрастающей (убывающей) на интервале $(c; d)$ и непрерывна во всех точках этого интервала.

Существование и возрастание (убывание) обратной функции доказано в параграфе 1.11. Непрерывность обратной функции мы не будем аккуратно доказывать, косвенным свидетельством в пользу этого утверждения является установленный в том же параграфе 1.11 факт, что графики функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны друг другу относительно прямой $y = x$.

По теореме о непрерывности обратной функции можно утверждать, что функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна во всех точках интервала $(0; +\infty)$. Заметим, что в точке 0, о которой теорема о непрерывности обратной функции ничего не утверждает, можно непосредственно проверить, что функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна справа.

По теореме о непрерывности обратной функции можно также утверждать, что функции $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arccotg} x$ непрерывны во всех точках интервала $(-\infty; +\infty)$, а функции $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ непрерывны во всех точках интервала $(-1; 1)$; при этом можно дополнительно проверить, что в точке -1 обе они непрерывны справа, а в точке 1 – слева.

Заметим, что определение непрерывности функции в точке на языке пределов $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ можно переписать также в виде $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$ и трактовать его следующим образом: «Знак непрерывной функции можно переставлять со знаком предела».

Это позволяет записывать, например, равенства вида $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$ или $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin(f(x)) = \sin\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right)$, поскольку функции $y = \sqrt{x}$ и $y = \sin x$ непрерывны.

До сих пор мы рассматривали непрерывность функции в отдельно взятой точке. Если функция $f(x)$ непрерывна во всех точках некоторого множества M , то говорят, что функция $f(x)$ непрерывна на множестве M .

Большой интерес представляет ситуация, когда множеством непрерывности функции является отрезок, т.е. замкнутый интервал вида $[a; b]$.

Для такой ситуации имеется несколько теорем, имеющих многочисленные применения при решении самых разнообразных математических задач.

Если функция непрерывна во всех точках некоторого отрезка и принимает на его концах значения разного знака, то внутри этого отрезка найдётся точка, в которой значение функции равно нулю.

Эта теорема, называемая *теоремой Больцано–Коши*, проиллюстрирована на рис. 4.34 а. Из рис. 4.34 б видно, что точек, в которых значение функции равно нулю,

может быть и несколько. Теорема утверждает, что одна такая точка обязательно найдётся.

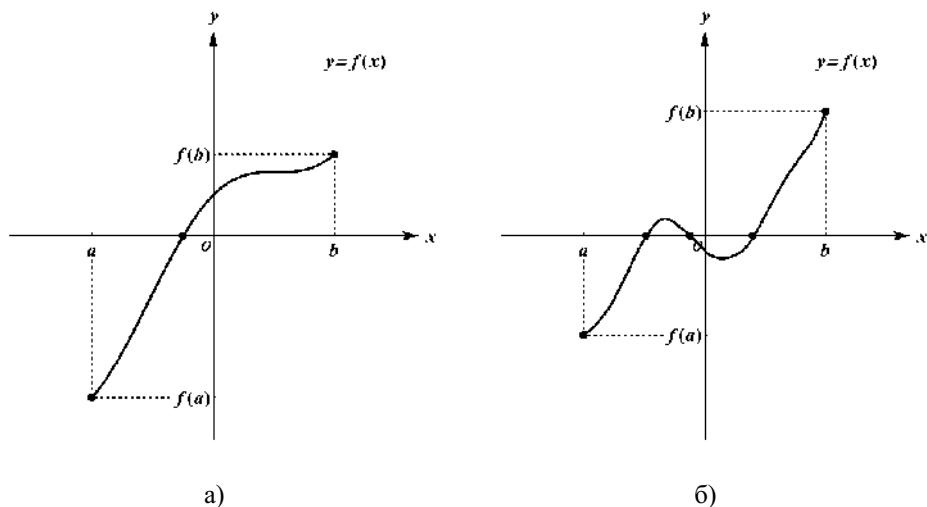


Рис. 4.34

Заметим, что условие «функция $f(x)$ принимает на концах отрезка $[a; b]$ значения разного знака» может быть записано в виде $f(a)f(b) < 0$.

Следствием теоремы Больцано–Коши является следующее утверждение:

Если непрерывная во всех точках интервала функция нигде не обращается в нуль, то она имеет один и тот же постоянный знак во всех точках этого интервала.

Ещё одним следствием теоремы Больцано–Коши является *теорема о промежуточном значении*:

Если непрерывная на отрезке функция принимает в некоторых точках два различных значения, то она принимает и все промежуточные значения.

Точнее, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и точки $u \in [a; b]$ и $v \in [a; b]$ таковы, что, скажем, $f(u) < f(v)$, то для любого числа z , лежащего между $f(u)$ и $f(v)$, найдётся такая точка t , лежащая между точками u и v , что $f(t) = z$.

Ещё две теоремы о свойствах функций, непрерывных на отрезке, носят имя выдающегося немецкого математика Вейерштрасса.

Первая теорема Вейерштрасса формулируется так:

Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Другими словами, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то найдутся такие числа A и B , что $A \leq f(x) \leq B$ при всех $x \in [a; b]$.

Вторая теорема Вейерштрасса уточняет первую:

Функция, непрерывная на отрезке, достигает на этом отрезке своего наименьшего и наибольшего значений.

Другими словами, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то найдутся такие точки $u \in [a; b]$ и $v \in [a; b]$, что, скажем, $f(x) \geq f(u)$ и $f(x) \leq f(v)$ при всех $x \in [a; b]$. Можно записать это и с помощью двойного неравенства: $f(u) \leq f(x) \leq f(v)$ при всех $x \in [a; b]$.

Находить наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке мы научимся в главе 5 нашего учебника.

H

- 1** а) Какая функция называется непрерывной в точке?
б) Какая функция называется непрерывной слева в точке?
в) Какая функция называется непрерывной справа в точке?
г) Какая связь существует между непрерывностью функции в точке и её непрерывностью слева и справа в этой точке?
- 2** Известно, что функция $y = x^3 + 3x$ непрерывна в своей области определения. Найдите приращение функции, если:
а) $x_0 = 1, \Delta x = 3$; в) $x_0 = 10, x_0 + \Delta x = 15$;
б) $x_0 + \Delta x = 3, \Delta x = 2$; г) $x_0 = -5, \Delta x = 0,5$.
- 3** Имеет ли функция $y = x^5 + 6x + 1$ хотя бы один нуль на отрезке $-1 \leq x \leq 1$?
- 4** Известно, что функция $y = x^2 + 3x + 5 \cos x$ не имеет нулей на отрезке $[-1; 1]$. Какой знак она имеет в любой точке этого отрезка?
- 5** Про функцию y известно, что она определена на отрезке $-17 \leq x \leq 33$ и убывает. Её областью значений является отрезок $2 \leq y \leq 10$. Найдите область определения и область значений обратной к y функции.

6 Используя определение непрерывности функции в точке, покажите, что следующие функции непрерывны в точке $x = 0$:

а) $f(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$; в) $f(x) = \sqrt{x+1}$;

б) $f(x) = x^2 + x$; г) $f(x) = \cos 3x$.

7 Докажите, что уравнение $3x + \cos \frac{\pi x}{2} = 2$ имеет корень на отрезке $0 \leq x \leq 1$, если известно, что функция $f(x) = 3x + \cos \frac{\pi x}{2}$ возрастает и непрерывна на этом отрезке.

8 Для указанных функций выпишите приращения функции, соответствующие приращению аргумента 1 и -1 в указанных точках x_0 .

а) $f(x) = x^2 + 3x$; $x_0 = 0$; $x_0 = 2$; в) $f(x) = 5x^2 + 2x + 1$; $x_0 = 2,5$; $x_0 = -4$;

б) $f(x) = \frac{1}{x} + x$; $x_0 = 2$; $x_0 = 11$; г) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$; $x_0 = \frac{9}{10}$; $x_0 = -\frac{3}{4}$.

9 Для указанных функций выпишите приращение функции в точке x_0 , соответствующее приращению аргумента Δx . Упростите его.

а) $f(x) = 2 - 5x$; в) $f(x) = x^2 - 2$; д) $f(x) = (x-1)^2 + (x+1)^2$;

б) $f(x) = 4x - 3$; г) $f(x) = \frac{x+1}{x}$; е) $f(x) = (x+2)(x+3)$.

10 Докажите, пользуясь одним из определений непрерывности, что данные функции непрерывны в указанных точках x_0 .

а) $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x-2}$; $x_0 = 1$; в) $f(x) = x + \frac{x-1}{2x+3}$; $x_0 = 4$;

б) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 2x + 1}$; $x_0 = -1$; г) $f(x) = \sqrt{x} + x$; $x_0 = 25$.

11 Является ли функция $f(x)$ непрерывной на указанном множестве M ?

а) $f(x) = \frac{x^2 - x}{x-2}$; $M = (-\infty; 2)$; г) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; $M = [-10; 0)$;

б) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$; $M = \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$; д) $f(x) = \frac{1-4x}{2x+7}$; $M = (3,5; +\infty)$;

в) $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 1}$; $M = [0; 3]$; е) $f(x) = \frac{x^3 - 3}{x^2 + 3x}$; $M = (-3; 0)$.

12 Докажите, что уравнение имеет хотя бы один корень на указанном отрезке.

а) $x^5 - 3x + 1 = 0$ на отрезке $[-2; 2]$; в) $\sqrt{x+3} + x^4 - 4 = 0$ на отрезке $[1; 6]$;

б) $x^3 + \frac{5}{x-2} + 2 = 0$ на отрезке $[-3; 1]$; г) $8x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ на отрезке $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

13 Укажите какой-нибудь интервал, на котором непрерывна функция.

а) $f(x) = \operatorname{tg} x$; в) $f(x) = \cos 2x$; г) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$;

б) $f(x) = \frac{x+5}{x^2-x}$; д) $f(x) = \frac{x+3}{2x-9}$; е) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

II

14 На рис. 4.35 приведены графики функций. Установите, непрерывны ли эти функции в отмеченных точках. Обоснуйте свой ответ.

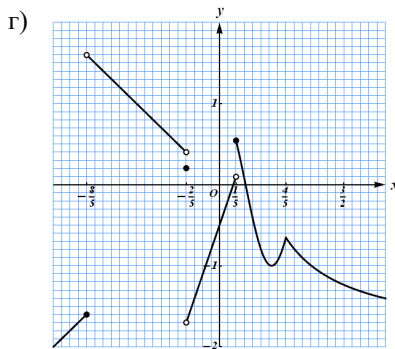
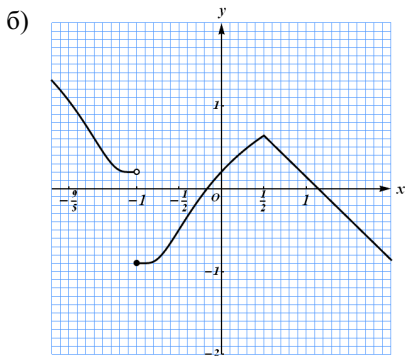
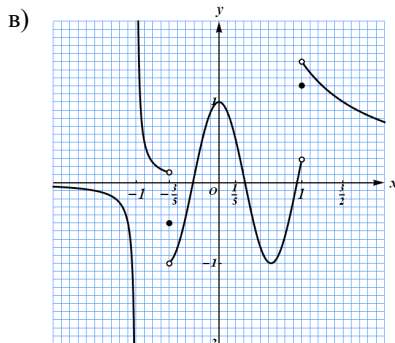
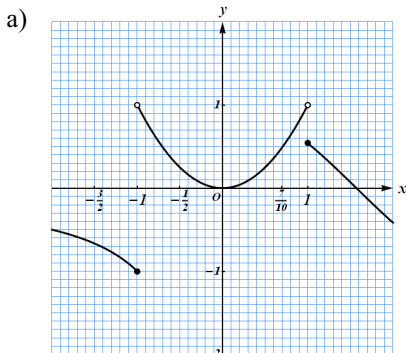


Рис. 4. 35

15 Докажите, пользуясь одним из определений непрерывности, что данные функции непрерывны в указанных точках x_0 .

а) $y = \sqrt{x}$; $x_0 = 1$;

в) $y = \sin 4x$; $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

б) $y = \frac{x+2}{3x+1}$; $x_0 = 0$;

г) $y = 2x^2 + 4x - 3$; $x_0 = -3$.

16 Функция $f(x)$ является непрерывной в точке x_0 , а функция $g(x)$ не является непрерывной в точке x_0 . Может ли быть непрерывной в точке x_0 функция:

а) $f(x) + g(x)$;

б) $f(x) - g(x)$;

в) $f(x)g(x)$?

17 Докажите, что уравнение имеет хотя бы один корень.

а) $x^5 + 2x^2 + 1 = 0$;

в) $x^2 - 3\cos \pi x = 0$;

б) $4x^2 + x^5 + 2 = 0$;

г) $x^4 + \frac{1}{x} + 1 = 0$.

18 Докажите, что уравнение имеет хотя бы один корень.

а) $20x - x^4 = 2\cos \frac{\pi x}{3}$;

в) $\sin \frac{100\pi}{x^2 + 1} + x = 0$;

б) $\frac{x^5 + x}{x^4 + 1} = 1$;

г) $\frac{x + \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}}{x - \pi} = 0$.

19 Верно ли, что функция $y = \frac{x^5 + 1}{x^2}$ принимает в некоторой точке значение 3? Обоснуйте свой ответ.

20 Верно ли, что функция $y = \frac{x^4 + x}{1 + x^2 + x^4}$ принимает в некоторой точке значение $\frac{3}{4}$? Обоснуйте свой ответ.

21 Верно ли, что функция $y = \frac{\pi \cos x}{x - 2\pi} + \frac{x}{\pi}$ принимает в некоторой точке значение $\frac{\pi}{4}$? Обоснуйте свой ответ.

М

22 Докажите, что если $g(x)$ – периодическая функция с периодом T , непрерывная в точке x_0 , то она непрерывна также во всех точках $x_0 + nT$, где $n \in \mathbb{Z}$.

23 Докажите непосредственно с помощью оси тангенсов, что функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ непрерывна в точке 0.

24 На основе теоремы Больцано–Коши строится численный метод поиска корней уравнений, позволяющий приближённо найти корень с заданной точностью, который носит название «метод дихотомии», или, проще, «метод деления отрезка пополам».

Устроен метод следующим образом. Пусть требуется с заданной точностью ε найти корень уравнения $f(x) = 0$, где $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция, причём известно, что $f(a) \cdot f(b) < 0$, т.е. корень на этом отрезке имеется, к тому же известно, что он единственный.

Находится $c = \frac{a+b}{2}$, т.е. середина отрезка. Далее, руководствуясь следующими правилами (обоснуйте их на основе теоремы Больцано–Коши), выбирают ту половину отрезка $a \leq x \leq b$ на которой лежит корень:

- 1) если $f(c) = 0$, то c – искомый корень;
- 2) если $f(c) \cdot f(a) < 0$, то берётся отрезок $[a; c]$;
- 3) если $f(c) \cdot f(b) < 0$, то берётся отрезок $[c; b]$.

После того как этот шаг сделан, описанная процедура повторяется уже с новым отрезком, длина которого в два раза меньше предыдущего. И так далее, до тех пор, пока длина полученного отрезка не станет меньше заданной точности ε .

Пользуясь методом дихотомии, найдите корень уравнения $x^3 + x - 1 = 0$ с точностью $\varepsilon = 0,01$, взяв в качестве начального отрезок $[0; 1]$.

25 Докажите непосредственно с помощью оси тангенсов, что функция $f(x) = \operatorname{arctg} x$ непрерывна в точке 0.

4.6. Производная функции в точке

При решении многих важных задач возникает один и тот же предел, который тем самым заслуживает внимательного изучения.

Сначала мы рассмотрим две наиболее распространённые из таких задач.

Задача 1 (средняя и мгновенная скорость прямолинейного движения).

Такого типа задачи очень часто возникают, например, в курсе физики.

Предположим, что точка движется по прямой. Будем считать, что этой прямой является ось Ox . Координата x точки меняется с течением времени. На математическом языке это можно выразить так: координата x является функцией времени t и записать в виде $x = x(t)$. Из физических соображений ясно, что в любой момент времени точка имеет определённую скорость. Скажем, при поездке на автомобиле узнать эту скорость можно посмотрев на показания спидометра. Из курса физики вы знаете, что скорость в данный момент времени называется *мгновенной скоростью*. Возникает задача нахождения мгновенной скорости по известному закону изменения координаты, т.е. по известной функции $x(t)$.

Возьмём какой-нибудь момент времени t_0 и рассмотрим промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$. Координата точки в момент времени t_0 была $x(t_0)$, в момент времени $t_0 + \Delta t$ стала $x(t_0 + \Delta t)$. Таким образом, координата изменилась на $x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$. Эта величина называется перемещением точки за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$. Мы можем найти среднюю скорость точки за этот промежуток времени, деля перемещение на длительность промежутка: $v_{\text{ср.}} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$. Учитывая, что

разность $x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$ есть приращение функции $x(t)$ (перемещение есть приращение координаты), формулу для средней скорости можно переписать короче:

$$v_{\text{ср.}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Теперь будем рассуждать следующим образом. Чем короче промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$, тем ближе средняя скорость к мгновенной скорости в момент времени t_0 . Можно сказать так: при Δt , стремящемся к нулю, средняя скорость стремится к мгновенной. Обозначив мгновенную скорость точки в момент времени t_0 через $v(t_0)$, это можно записать в виде: $v_{\text{ср.}} \rightarrow v(t_0)$ при $\Delta t \rightarrow 0$, или в виде

$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Итак, задача нахождения мгновенной скорости точки при прямолинейном движении сводится к вычислению выписанного предела.

Задача 2 (касательная к графику функции).

Из курса геометрии вы знаете определение касательной к окружности. Это прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку. Для некоторых других кривых это определение тоже подходит, например, для эллипса. Но для подавляющего большинства кривых это не так. Например, прямая, изображённая на рис. 4.36, никак не ассоциируется с касательной к синусоиде.

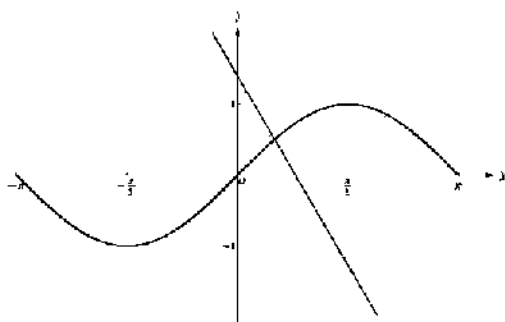


Рис. 4.36

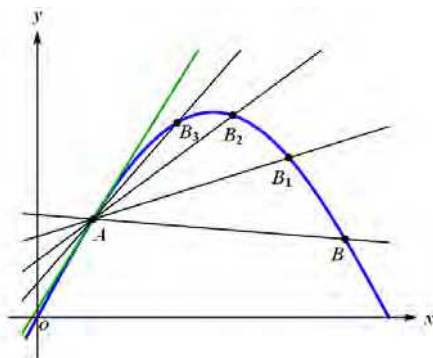


Рис. 4.37

Дадим общее определение касательной к графику функции в выбранной на нём точке A . Сначала возьмём на графике вторую точку B и проведём через неё и выбранную точку A прямую. Эта прямая AB называется *секущей*, проходящей через точку A . Если теперь перемещать точку B по графику таким образом, чтобы она приближалась к выбранной точке A , то секущая будет занимать всё новые и новые положения. На рис 4.37 изображены, кроме AB , положения секущей AB_1, AB_2, AB_3 . *Касательной* к графику в точке A называется предельное (конечное) положение секущей AB , когда точка B , двигаясь по графику к точке A , достигает её, совпадает с ней (естественно, если такое положение существует).

Пусть прямая, являющаяся касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке A с абсциссой x_0 , имеет уравнение $y = kx + b$. Поставим задачу нахождения углового коэффициента k этой касательной. Ясно, что зная угловой коэффициент и тот факт, что касательная проходит через точку $A(x_0; f(x_0))$, мы сможем записать уравнение касательной.

Возьмём на графике функции $y = f(x)$ ещё одну точку B . Пусть абсцисса этой точки равна $x_0 + \Delta x$, тогда её координаты $B(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$. Поскольку угловой коэффициент прямой, проходящей через две точки, равен частному от деления разности ординат этих точек на разность их абсцисс, то угловой коэффициент секущей AB равен: $k_{\text{сек.}} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

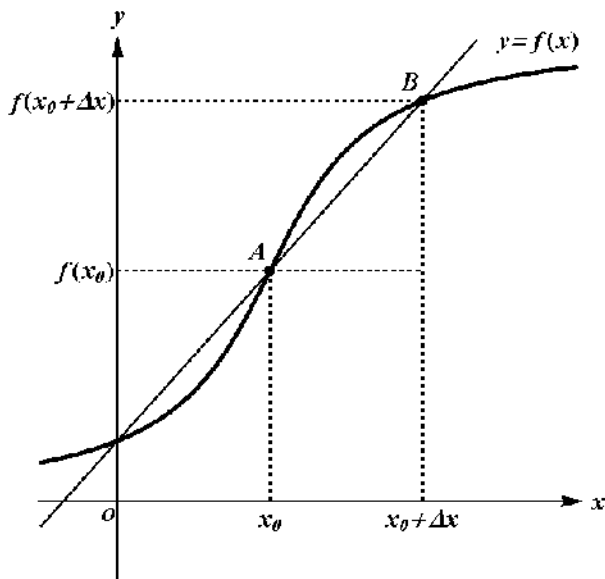


Рис. 4.38

При движении точки B по графику к точке A Δx будет стремиться к нулю, секущая будет приближаться к касательной а угловой коэффициент $k_{\text{сек.}}$ секущей будет стремиться к угловому коэффициенту k касательной. Нас, таким образом, интересует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, который и равен искомому угловому коэффициенту касательной.

Мы видим, что для решения каждой из рассмотренных задач надо уметь вычислять предел вида $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, т.е. предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. Такой предел имеет специальное название, и его изучению мы посвятим несколько ближайших параграфов нашего учебника.

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента в этой точке, когда последнее стремится к нулю.

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$.

Таким образом, $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, или $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Иногда, для того, чтобы в правой части равенства тоже было явное упоминание о точке x_0 , формулу, задающую определение производной, записывают так:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Как видите, мы просто записали вместо Δy то выражение, которому оно равно:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Сразу же заметим, что функция, имеющая производную в точке, называется *дифференцируемой* в этой точке, а вычисление производной называется *дифференцированием*.

Попробуем, пользуясь определением производной, найти производные нескольких функций. При этом используется одна и та же стандартная последовательностей шагов, список которых мы не будем отдельно выписывать, а просто будем каждый раз выполнять эти шаги.

I. Производная постоянной равна нулю.

Нам нужно доказать, что если $f(x) = A$, где A – действительное число, то $f'(x_0) = 0$ при любом действительном x_0 .

1) Возьмём приращение аргумента Δx и вычислим соответствующее ему приращение функции: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A - A = 0$.

2) Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и упростим его: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$.

3) Найдём предел $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$, поскольку предел постоянной равен этой постоянной.

Мы доказали, что если $f(x) = A$, то $f'(x_0) = 0$. Заметим, что при вычислении производной мы обычно будем получать результат в виде $f'(x_0)$, но затем его удобнее переписать в виде $f'(x)$ – при том же аргументе, при котором была задана функция. Итак, если $f(x) = A$, то $f'(x) = 0$. Этот результат можно записать ещё проще: $A' = 0$.

II. Найдём производную функции $f(x) = x$.

1) Возьмём приращение аргумента Δx и вычислим соответствующее ему приращение функции: $\Delta y = (x_0 + \Delta x) - x_0 = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x$.

2) Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и упростим его: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

3) Найдём предел $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1$, поскольку предел постоянной равен этой постоянной.

Мы доказали, что если $f(x) = x$, то $f'(x) = 1$. Этот результат можно записать ещё проще: $x' = 1$.

III. Найдём производную функции $f(x) = x^2$.

1) Возьмём приращение аргумента Δx и вычислим соответствующее ему приращение функции:

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = (x_0 + \Delta x - x_0)(x_0 + \Delta x + x_0) = \Delta x(2x_0 + \Delta x).$$

Мы воспользовались формулой разности квадратов.

2) Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и упростим его: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$.

3) Найдём предел:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 2x_0 + 0 = 2x_0.$$

Мы доказали, что если $f(x) = x^2$, то $f'(x_0) = 2x_0$, а значит, $f'(x) = 2x$. Этот результат можно записать так: $(x^2)' = 2x$.

IV. Найдём производную функции $f(x) = \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$.

1) Возьмём приращение аргумента Δx в точке $x_0 \neq 0$ и вычислим соответствующее ему приращение функции:

$$\Delta y = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}.$$

2) Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и упростим его: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} : \Delta x = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$.

3) Найдём предел:

$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$. Мы знаем, что дробно-рациональная функция

$y(\Delta x) = \frac{-1}{x_0(x_0 + \Delta x)}$ непрерывна, значит, для вычисления её предела при $\Delta x \rightarrow 0$

можно просто подставить $\Delta x = 0$ в формулу, задающую функцию. Получим

$$f'(x_0) = \frac{-1}{x_0^2}$$

Мы доказали, что если $f(x) = \frac{1}{x}$, то $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$, а значит, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Этот

результат можно записать так: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

V. Найдём производную функции $f(x) = \sqrt{x}$.

1) Возьмём приращение аргумента Δx в точке $x_0 > 0$ и вычислим соответствующее ему приращение функции:

$\Delta y = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}$. Для дальнейшего преобразования этого выражения умножим и разделим его на сумму таких же радикалов.

$$\begin{aligned} \text{Получим: } \Delta y &= \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} = \\ &= \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}. \end{aligned}$$

2) Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и упростим его:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} : \Delta x = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}.$$

3) Найдём предел:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}. \text{ По теоремам о непрерывных функциях}$$

функция $y(\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$ непрерывна, значит, для вычисления её предела при

$\Delta x \rightarrow 0$ можно просто подставить $\Delta x = 0$ в формулу, задающую функцию. Получим

$$f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Мы доказали, что если $f(x) = \sqrt{x}$, то $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$, а значит, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Этот результат можно записать так: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ при $x > 0$. Обычно этот результат формулируют следующим образом: «Производная квадратного корня есть единица, делённая на два таких корня».

VI. Найдём производную функции $f(x) = \sin x$.

1) Возьмём приращение аргумента Δx и вычислим соответствующее ему приращение функции:

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Мы воспользовались формулой для преобразования разности синусов в произведение.

2) Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$. Здесь у нас впервые возникает ситуация, когда в полученной дроби ничего не удаётся сократить.

3) Перепишем наше отношение в виде $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$ и будем искать

его предел при $\Delta x \rightarrow 0$ как произведение двух пределов:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Первый множитель – это первый замечательный предел, он равен 1. Для нахождения второго множителя, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$, вспомним, что косинус – непрерывная функция, значит:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) = \cos(x_0 + 0) = \cos x_0.$$

Мы доказали, что если $f(x) = \sin x$, то $f'(x_0) = \cos x_0$, а значит, $f'(x) = \cos x$.

Этот результат можно записать так: $(\sin x)' = \cos x$.

VII. Аналогичным рассуждением можно установить, что $(\cos x)' = -\sin x$.

Н

- 1 а) Что называется средней скоростью движения?
- б) Что называется мгновенной скоростью движения?
- в) Как вычислить мгновенную скорость в точке, зная пройденное расстояние как функцию времени?
- г) Как связаны между собой средняя скорость и мгновенная?

2 Найдите среднюю скорость движения на отрезке $[t_0; t_0 + \Delta t]$ для разных значений Δt , если зависимость пути от времени выражается функцией $f(t)$.

а) $f(t) = 5t + 1$, $t_0 = 1$, $\Delta t = 1$; $\Delta t = 0,1$; $\Delta t = 0,01$; $\Delta t = 0,001$;

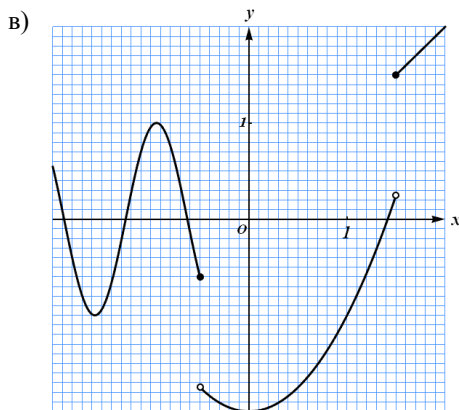
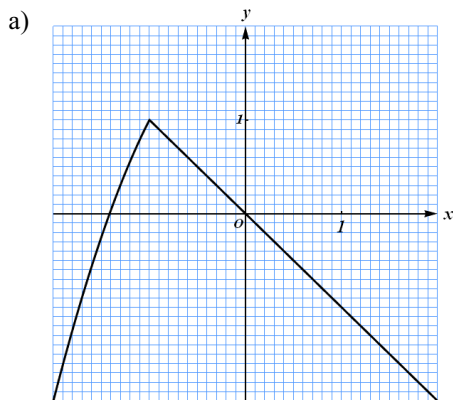
б) $f(t) = t^2 - 3t + 2$, $t_0 = 3$, $\Delta t = 10$; $\Delta t = 1$; $\Delta t = \frac{1}{2}$; $\Delta t = \frac{1}{10}$; $\Delta t = \frac{1}{100}$.

3 Найдите среднюю скорость движения на отрезке $[t_0; t_0 + \Delta t]$ для разных значений t_0 , если зависимость пути от времени выражается функцией $f(t)$.

а) $f(t) = 2t^2 + 1$, $\Delta t = \frac{1}{100}$, $t_0 = 0$; $t_0 = 1$; $t_0 = 2$; $t_0 = 10$;

б) $f(t) = \frac{t^2}{t+1}$, $\Delta t = \frac{1}{10}$, $t_0 = 0$; $t_0 = \frac{1}{2}$; $t_0 = \frac{3}{4}$; $t_0 = 1$.

- 4 а) Что называется секущей к графику функции в данной точке?
 - б) Что называется касательной к графику функции в данной точке?
 - в) Как связаны секущая и касательная к графику функции в данной точке?
- 5 Укажите точки на графике функции, в которых нет касательной.



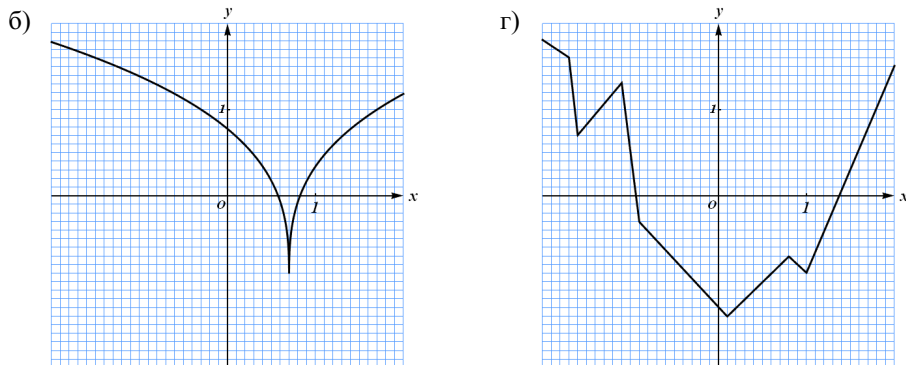


Рис. 4.39

6 Дана функция $y = x^2$ и набор точек: $A(0;0)$, $B_1(3;9)$, $B_2(2;4)$, $B_3(1;1)$, $B_4\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$. Постройте на клетчатой бумаге (взяв за единицу 4 клетки) набор секущих AB , AB_1 , AB_2 , AB_3 и AB_4 . Найдите уравнение касательной к графику функции y в точке A и изобразите её вместе с набором секущих.

7 Дана функция $y = \frac{1}{x}$ и набор точек: $A(1;1)$, $B_1\left(2;\frac{1}{2}\right)$, $B_2\left(\frac{1}{2};2\right)$, $B_3\left(4;\frac{1}{4}\right)$, $B_4\left(\frac{1}{4};4\right)$. Постройте на клетчатой бумаге (взяв за единицу 4 клетки) набор секущих AB , AB_1 , AB_2 , AB_3 и AB_4 . Найдите уравнение касательной к графику функции y в точке A и изобразите её вместе с набором секущих.

8 Для графика функции построьте секущие, проходящие через точку A и отмеченные точки графика, а также изобразите касательную к графику в точке A .

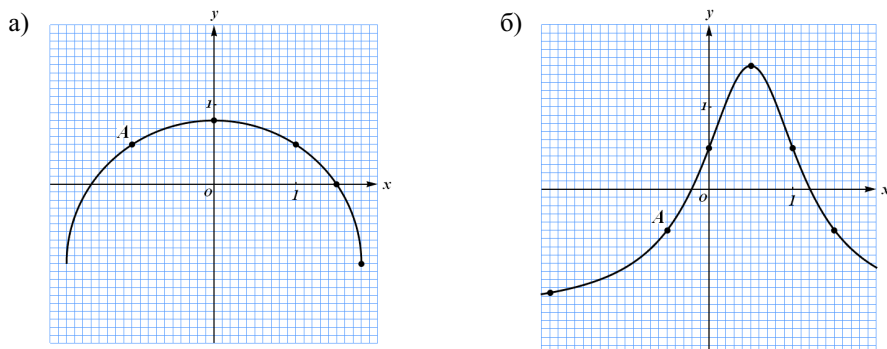


Рис. 4.40

9 Для указанных функций выпишите приращения функции, соответствующие приращению аргумента 1 и -1 в указанных точках x_0 . Выпишите также отношения приращения функции к приращению аргумента.

- а) $f(x) = x^2 - 2x$; $x_0 = 0$; $x_0 = 3$; в) $f(x) = \sin \pi x$; $x_0 = -5$; $x_0 = 5$;
 б) $f(x) = x + \sqrt{x+2}$; $x_0 = 2$; $x_0 = 3$; г) $f(x) = \frac{2x+1}{2x+3}$; $x_0 = 0,5$; $x_0 = 2,5$.

10 Для указанных функций выпишите приращения функции, соответствующие приращению аргумента $\frac{1}{10}$ и $-\frac{1}{10}$ в указанных точках x_0 . Выпишите также отношения приращения функции к приращению аргумента.

- а) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$; $x_0 = -10$; $x_0 = 10$; в) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$; $x_0 = 3,9$; $x_0 = 16,1$;
 б) $f(x) = x^3 - 3x$; $x_0 = 0,3$; $x_0 = 0,8$; г) $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$; $x_0 = \frac{1}{2}$; $x_0 = 1$.

11 Для указанных функций выпишите приращение функции в точке x_0 , соответствующее приращению аргумента Δx . Упростите его.

- а) $f(x) = 3 - 2x$; в) $f(x) = \sin 2x$; д) $f(x) = 2x + \frac{3}{x}$;
 б) $f(x) = x^2 + 2x - 1$; г) $f(x) = (2x-1)^2$; е) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

12 С помощью определения производной найдите производные функций в указанных точках x_0 .

- а) $f(x) = 2x + 3$; $x_0 = 0$; в) $f(x) = \frac{3x-1}{2}$; $x_0 = -2$;
 б) $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}$; $x_0 = 3$; г) $f(x) = \frac{5x-1}{2} + \frac{2x+4}{3}$; $x_0 = -4$.

13 С помощью определения производной найдите производные функций в указанных точках x_0 .

- а) $f(x) = x^2 + 3$; $x_0 = 0$; в) $f(x) = \frac{x-1}{x}$; $x_0 = 2$;
 б) $f(x) = \frac{2x+5}{3x-4}$; $x_0 = 5$; г) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$; $x_0 = 1$.

14 С помощью определения производной найдите производные функций.

- а) $f(x) = x + 3$; б) $f(x) = 3x - 2$; в) $f(x) = \frac{x-2}{3}$.

П

15 На рис. 4.41 приведены графики функций. Установите, имеют ли эти графики касательные в отмеченных точках. Обоснуйте свой ответ.

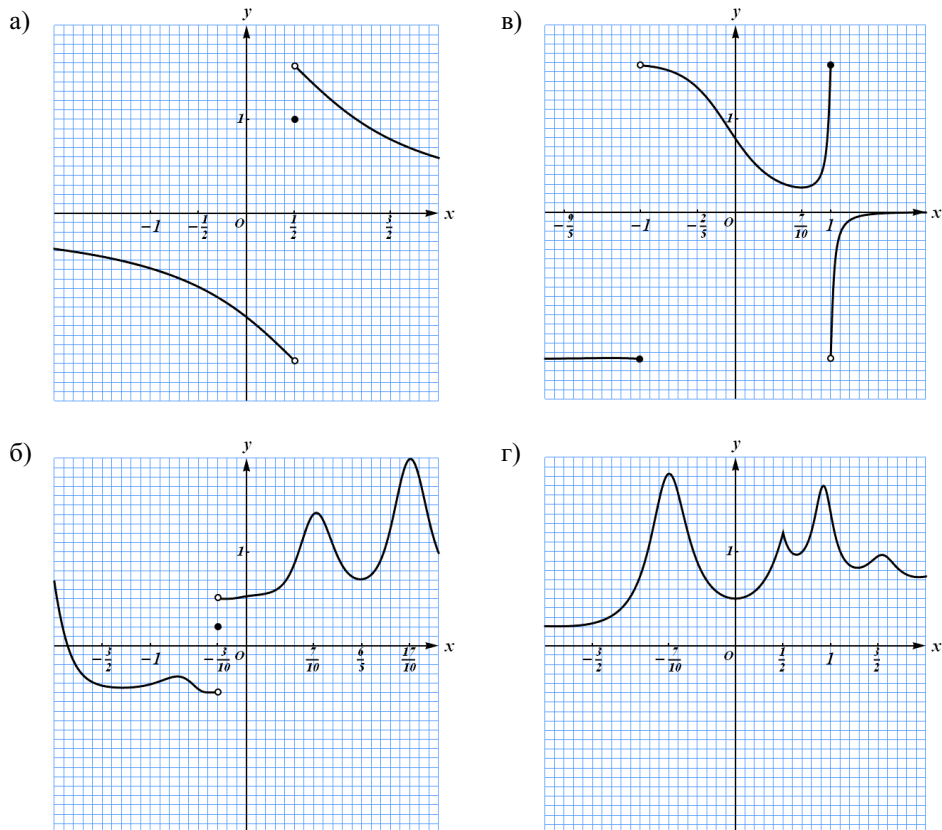


Рис. 4.41

16 С помощью определения производной найдите производные функций.

- а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; в) $f(x) = \cos x$.

17 С помощью определения производной найдите производные функций в указанных точках x_0 .

- а) $f(x) = \sqrt{x} + 3$; $x_0 = 4$; в) $f(x) = \frac{x-1}{x}$; $x_0 = 5$;
б) $f(x) = 3x - 2x^2 + 1$; $x_0 = -2$; г) $f(x) = x^4 + x$; $x_0 = 0$.

18 Докажите верность равенств.

- а) $f'(1) = \frac{1}{4}$, если $f(x) = \sqrt{x+3}$; в) $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$, если $f(x) = x + \frac{1}{x}$;
б) $f'(2) = 7$, если $f(x) = x^2 + 3x - 1$; г) $f'\left(\frac{\pi}{9}\right) = -3\sqrt{3}$, если $f(x) = 2 \cos 3x$.

М

19 С помощью определения производной найдите производные функций.

- а) $f(x) = \sin 2x$; б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$; в) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$.

20 С помощью определения производной найдите производные функций.

- а) $f(x) = \operatorname{tg} x$; б) $f(x) = \operatorname{ctg} x$; в) $f(x) = \arcsin x$.

4.7. Методы вычисления производных

При вычислении производных важнейшую роль играют формулы для нахождения производной суммы, разности, произведения и частного двух функций, каждая из которых имеет производную.

Начнём с производной суммы.

Если существуют производные функций $u(x)$ и $v(x)$, то существует производная $(u(x) + v(x))'$ суммы этих функций, причём она равна сумме производных функций $u(x)$ и $v(x)$.

Кратко доказанную теорему формулируют так:

Производная суммы равна сумме производных.

Краткая запись этой теоремы следующая: $(u + v)' = u' + v'$.

Для доказательства обозначим $u(x) + v(x) = f(x)$. Нам дано, что в точке x_0 существуют производные $u'(x_0)$ и $v'(x_0)$, и требуется доказать, что существует производная $f'(x_0)$, причём $f'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$.

Пойдём обычным путём, обратив внимание на одну особенность. Раньше в пределах каждой отдельной задачи или теоремы мы имели дело с единственной функцией и если она была, скажем, $y = f(x)$, то её приращение обычно обозначалось Δy . В теореме, доказательство которой мы сейчас проводим, имеется три функции: $u(x)$, $v(x)$ и $f(x)$, поэтому их приращения будем обозначать соответственно Δu , Δv и Δf .

1) Возьмём приращение аргумента Δx и вычислим соответствующее ему приращение функции $f(x)$:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (u(x_0 + \Delta x) + v(x_0 + \Delta x)) - (u(x_0) + v(x_0)) = \\ &= (u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)) + (v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)) = \Delta u + \Delta v.\end{aligned}$$

2) Составим отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ и преобразуем его: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$.

3) Поскольку по условию существуют пределы $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x_0)$ и

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x_0)$, то по теореме о пределе суммы существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)$,

причём он равен сумме этих двух пределов:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x_0) + v'(x_0).$$

Но поскольку $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$, то $f'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$, и теорема доказана.

Абсолютно аналогично доказывается теорема о производной разности.

Производная разности равна разности производных.

Краткая запись этой теоремы следующая: $(u - v)' = u' - v'$.

Для вывода формул для производной произведения и частного двух функций нам понадобится одна вспомогательная теорема, которая имеет и самостоятельную ценность.

Если функция имеет производную в точке, то она непрерывна в этой точке.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x_0)$ в точке x_0 . Это значит, что существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Поскольку предел постоянной равен самой этой постоянной, то $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f'(x_0) = f'(x_0)$. Рассматривая разность $\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0)$ как функцию аргумента Δx

и обозначая её $\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0) = h(\Delta x)$, получим по теореме о пределе разности:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} h(\Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

Умножая обе части равенства $\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0) = h(\Delta x)$ на Δx , получим:

$$\Delta f - f'(x_0) \cdot \Delta x = h(\Delta x) \cdot \Delta x, \text{ или } \Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + h(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Теперь найдём предел Δf при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f'(x_0) \cdot \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (h(\Delta x) \cdot \Delta x) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f'(x_0) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} h(\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = f'(x_0) \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Поскольку $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0$, по определению непрерывности на языке приращений заключаем, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , и теорема доказана.

Теперь приступим к теореме о производной произведения.

Если существуют производные функций $u(x)$ и $v(x)$, то существует производная $(u(x)v(x))'$ произведения этих функций, причём она вычисляется по формуле: $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

Кратко эта формула записывается так: $(uv)' = u'v + uv'$.

Обозначим $u(x) \cdot v(x) = f(x)$. Нам дано, что в точке x_0 существуют производные $u'(x_0)$ и $v'(x_0)$, и требуется доказать, что существует производная $f'(x_0)$, причём $f'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$

1) Возьмём приращение аргумента Δx и вычислим соответствующее ему приращение функции $f(x)$. При этом мы воспользуемся следующим соображением: поскольку $\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$, то $u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \Delta u$, и аналогично $v(x_0 + \Delta x) = v(x_0) + \Delta v$.

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = u(x_0 + \Delta x) \cdot v(x_0 + \Delta x) - u(x_0) \cdot v(x_0) = \\ &= (u(x_0) + \Delta u)(v(x_0) + \Delta v) - u(x_0) \cdot v(x_0) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= u(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \Delta v + v(x_0) \Delta u + \Delta u \Delta v - u(x_0) \cdot v(x_0) = \\
&= u(x_0) \Delta v + v(x_0) \Delta u + \Delta u \Delta v.
\end{aligned}$$

2) Составим отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ и преобразуем его:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{u(x_0) \Delta v + v(x_0) \Delta u + \Delta u \Delta v}{\Delta x} = u(x_0) \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

3) Но по условию существуют пределы $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x_0)$ и $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x_0)$.

Кроме того, применяя теорему о непрерывности функции, имеющей производную, к функции $u(x)$ в точке x_0 , получаем, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$. Поэтому по теоремам о пределе

суммы, пределе произведения и пределе постоянной заключаем, что существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, причём:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(u(x_0) \frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x_0) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (u(x_0)) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v(x_0)) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = \\
&= u(x_0) \cdot v'(x_0) + v(x_0) \cdot u'(x_0) + 0 \cdot v'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + v'(x_0) \cdot u(x_0)
\end{aligned}$$

Но т.к. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$, то $f'(x_0) = u'(x_0) \cdot v(x_0) + v'(x_0) \cdot u(x_0)$, и теорема

доказана.

Пользуясь доказанной теоремой, вычислим, например, производную функции $f(x) = x^2 \cos x$. Имеем:

$$(x^2 \cos x)' = (x^2)' \cos x + x^2 (\cos x)' = 2x \cos x + x^2 (-\sin x) = 2x \cos x - x^2 \sin x.$$

В качестве следствия доказанной теоремы рассмотрим довольно распространённую ситуацию произведения двух функций, одна из которых постоянна. Пусть в формуле $(uv)' = u'v + uv'$ производной произведения, скажем, $v = C$, где C – произвольное действительное число. Поскольку $C' = 0$, имеем:

$$(uC)' = u'C + uC' = u'C + u \cdot 0 = u'C.$$

Полученную формулу принято записывать в виде $(Cu)' = Cu'$ и читать так:

Постоянный множитель можно выносить за знак производной.

Например, $(5 \sin x)' = 5 \cdot (\sin x)' = 5 \cos x$.

Докажем теорему о производной частного двух функций.

Если существуют производные функций $u(x)$ и $v(x)$ и при этом $v(x) \neq 0$, то существует производная $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'$ частного этих функций, причём она вычисляется по формуле: $\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

Краткая запись этой формулы следующая: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Обозначим $\frac{u(x)}{v(x)} = f(x)$. Нам дано, что в точке x_0 существуют производные $u'(x_0)$ и $v'(x_0)$, и требуется доказать, что существует производная $f'(x_0)$, причём $f'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$. При этом мы знаем, что $v(x_0) \neq 0$.

1) Возьмём приращение аргумента Δx и вычислим соответствующее ему приращение функции $f(x)$. Так же, как при доказательстве предыдущей теоремы, мы воспользуемся равенствами $u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \Delta u$ и $v(x_0 + \Delta x) = v(x_0) + \Delta v$.

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{u(x_0 + \Delta x)}{v(x_0 + \Delta x)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u(x_0) + \Delta u}{v(x_0) + \Delta v} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \\ &= \frac{(u(x_0) + \Delta u) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot (v(x_0) + \Delta v)}{(v(x_0) + \Delta v) \cdot v(x_0)} = \\ &= \frac{u(x_0) \cdot v(x_0) + v(x_0) \Delta u - u(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \Delta v}{(v(x_0) + \Delta v) \cdot v(x_0)} = \frac{v(x_0) \Delta u - u(x_0) \Delta v}{(v(x_0) + \Delta v) \cdot v(x_0)}. \end{aligned}$$

2) Составим отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ и преобразуем его:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{v(x_0) \Delta u - u(x_0) \Delta v}{(v(x_0) + \Delta v) \cdot v(x_0)} : \Delta x = \frac{v(x_0) \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x_0) \frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v(x_0) + \Delta v) \cdot v(x_0)}.$$

3) По условию существуют пределы $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x_0)$ и $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'(x_0)$. Кроме того, применяя теорему о непрерывности функции, имеющей производную, к

функции $v(x)$ в точке x_0 , получаем, что $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = 0$. Поэтому по теоремам о пределе суммы, разности, произведения и частного и теореме о пределе постоянной заключаем, что существует предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, причём:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{v(x_0) \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x_0) \frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v(x_0) + \Delta v) \cdot v(x_0)} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(v(x_0) \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x_0) \frac{\Delta v}{\Delta x} \right)}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((v(x_0) + \Delta v) \cdot v(x_0))} = \\ &= \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v(x_0)) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (u(x_0)) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v(x_0)) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v \right) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (v(x_0))} = \frac{v(x_0) \cdot u'(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{(v(x_0) + 0) \cdot v(x_0)} = \\ &= \frac{u'(x_0) v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{v^2(x_0)}. \end{aligned}$$

Но т.к. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0)$, то $f'(x_0) = \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{v^2(x_0)}$, и теорема

доказана.

Применяя доказанные теоремы о произведении суммы, разности, произведения и частного (их ещё называют теоремами о связи производной с арифметическими действиями), можно находить производные большого количества функций.

Вычислим, например, производную функции $f(x) = x^3$.

Представим x^3 как произведение $x^3 = x^2 \cdot x$. Получим:

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 \cdot x' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

Аналогично:

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot x' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3,$$

$$(x^5)' = (x^4 \cdot x)' = (x^4)' \cdot x + x^4 \cdot x' = 4x^3 \cdot x + x^4 \cdot 1 = 5x^4, \text{ и т.д.}$$

Можно доказать, что при любом натуральном n справедлива формула:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Основываясь на этой формуле, выведем формулу для производной функции $\frac{1}{x^n}$,

где n – натуральное число. Получим:

$$\left(\frac{1}{x^n} \right)' = \frac{1' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot \frac{x^{n-1}}{x^{2n}} = -n \cdot x^{n-1-2n} = -n \cdot x^{-n-1}.$$

Эту формулу удобно переписать, используя отрицательный показатель степени. Заменим $m = -n$. Тогда m – целое отрицательное число, и для него имеем:

$$(x^m)' = (x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -n \cdot x^{-n-1} = nx^{m-1}.$$

Таким образом, формула для вычисления производной функции $f(x) = x^n$ оказалась одинаковой и для целых положительных, и для целых отрицательных чисел. Непосредственно можно проверить, то она справедлива и для $n = 0$. Действительно, т.к. $x^0 = 1$ (при $x \neq 0$), а производная постоянной равна 0, то $(x^0)' = 0$. В то же время формальное применение формулы $(x^n)' = nx^{n-1}$ при $n = 0$ даёт $(x^0)' = 0 \cdot x^{0-1} = 0$, т.е. тот же результат.

Таким образом:

При любом целом n справедлива формула: $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Формула производной частного позволяет найти производные тангенса и котангенса:

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \\ (\operatorname{ctg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

И наконец, рассмотрим самый трудный случай вычисления производной – производную композиции или сложной функции.

Если у нас имеется функция $y = f(t)$ переменной t , и при этом переменная t является функцией переменной x , т.е. $t = g(x)$, то переменная y является функцией переменной x : $y = f(g(x))$. Такая функция называется *композицией* функций f и g , или *сложной функцией*. Переменная t иногда называется *промежуточным аргументом* сложной функции.

Например, если $y = f(t) = \cos t$, $t = g(x) = \sqrt{x}$, то $y = f(g(x)) = \cos \sqrt{x}$.

Или если $y = f(t) = t^2$, $t = g(x) = \sin x$, то $y = f(g(x)) = (\sin x)^2 = \sin^2 x$.

Теорема о производной сложной функции формулируется следующим образом:

Если функция $t = g(x)$ имеет производную в точке x_0 , а функция $y = f(t)$ имеет производную в точке $t_0 = g(x_0)$, то сложная функция $y = f(g(x))$ имеет производную в точке x_0 , причём эта производная может быть вычислена по формуле:

$$f(g(x))' = f'_t(t) \cdot g'_x(x).$$

Возьмём приращение аргумента Δx и вычислим соответствующее ему приращение функции $t = g(x)$. Так же, как при доказательстве теорем о производной произведения и производной частного, мы воспользуемся равенством $g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + \Delta g$ или, по-другому, $g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + \Delta t$.

Теперь находим:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0)) = \\ &= f(g(x_0) + \Delta t) - f(g(x_0)) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = \Delta f. \end{aligned}$$

Выпишем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и попробуем преобразовать его. Если функция

$t = g(x)$ такова, что $\Delta t \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0 , то это нам удастся:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x}.$$

Поскольку функция $t = g(x)$ имеет производную в точке x_0 , то она непрерывна в этой точке, и при $\Delta x \rightarrow 0$ будет также и $\Delta t \rightarrow 0$. Это позволит вычислить производную сложной функции, переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'_t(t_0) \cdot g'_x(x_0).$$

Теорема для рассматриваемого случая доказана. Что же касается случая, когда Δt может обращаться в нуль в любой проколотой окрестности точки x_0 , то там доказательство заметно сложнее, и мы в нашем учебнике его рассматривать не будем.

Формулу для производной сложной функции иногда удобнее записывать в виде:

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Вычислим производные сложных функций из двух рассмотренных выше примеров.

1) Для функции $y = \cos \sqrt{x}$, которая может быть представлена в виде $y = f(g(x))$ при $y = f(t) = \cos t$, $t = g(x) = \sqrt{x}$, проводим следующее рассуждение: поскольку $f'(t) = (\cos t)' = -\sin t$, а $g'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, получаем:

$$(\cos \sqrt{x})' = -\sin t \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\sin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

2) Для функции $y = \sin^2 x$, которая может быть представлена в виде $y = f(g(x))$ при $y = f(t) = t^2$, $t = g(x) = \sin x$, проводим следующее рассуждение: поскольку $f'(t) = (t^2)' = 2t$, а $g'(x) = (\sin x)' = \cos x$, получаем:

$$(\sin^2 x)' = 2t \cdot \cos x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

В заключение параграфа выведем формулу для вычисления производной обратной функции.

Пусть функция $x = f(t)$ имеет обратную функцию $t = g(x)$, причём функция $f(t)$ имеет производную в точке t_0 , а функция $g(x)$ имеет производную в точке x_0 , где $t_0 = g(x_0)$ и $x_0 = f(t_0)$. Поскольку функции $x = f(t)$ и $t = g(x)$ – взаимно обратные, то $x = f(g(x))$. Вычислим производную от обеих частей этого тождества. Производная от левой части (от x) равна 1. Производная от правой части может быть вычислена по формуле для производной сложной функции, рассмотренной выше:

$$f(g(x))' = f'_t(t) \cdot g'_x(x). \text{ Получаем, таким образом, } 1 = f'_t(t) \cdot g'_x(x), \text{ откуда } g'_x(x) = \frac{1}{f'_t(t)}, \text{ или короче: } g'(x) = \frac{1}{f'(t)}.$$

При решении задач на нахождение производной обратной функции более удобна запись именно в таком виде, с $x = f(t)$ и $t = g(x)$.

А вот при записи окончательного результата более удобно записать $g(x)$ в виде $f^{-1}(x)$, подчёркивая тот факт, что $t = g(x)$ – обратная функция для функции $x = f(t)$.

Для примера найдём производную функции $g(x) = \sqrt{x}$, пользуясь тем фактом, что она является обратной для функции $f(t) = t^2$ на интервале $t \in [0; +\infty)$.

Поскольку $f'(t) = (t^2)' = 2t$, то по формуле для производной обратной функции $g'(x) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{2t}$. Осталось выразить t через x . Но у нас $t = g(x) = \sqrt{x}$, значит, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, или $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Этот результат совпадает с результатом пункта V предыдущего параграфа, где производная функции $g(x) = \sqrt{x}$ была получена непосредственно, с помощью определения производной.

Н

1 Найдите производные суммы функций.

а) $x^2 + 2\sqrt{x}$;	в) $x^4 + 3x^2$;	д) $\operatorname{tg} x + x + 1$;
б) $\sin x + \cos x$;	г) $2x + \sin x$;	е) $5 + 2x + x^4$.

2 Найдите производные разности функций.

а) $6x - x^3$;	в) $\frac{1}{x} - \sqrt{x}$;	д) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{x^3}$;
б) $2\operatorname{tg} x - 3\cos x$;	г) $2x - \cos x$;	е) $\sin x - 2\operatorname{tg} x$.

3 Найдите производные произведения функций.

а) $x^2 \sin x$;	в) $\frac{1}{x} \cdot \operatorname{tg} x$;	д) $(\operatorname{tg} x + 1)\sqrt{x}$;
б) $(x-1)(x+3)$;	г) $(2x+1)\cos x$;	е) $\frac{1}{x} \cdot (x-2)$.

4 Найдите производные частного функций.

а) $\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}}$;	в) $\frac{\cos x}{x + 1}$;	д) $\frac{2x^3 - x}{\operatorname{tg} x}$;
б) $\frac{2x - 1}{2x + 1}$;	г) $\frac{x}{x + \sin x}$;	е) $\frac{3x - 4}{x^2 + 1}$.

5 Найдите производные сложных функций.

а) $\cos x^2$;	в) $(x+3)^4$;	д) $\sin(x + \sqrt{x})$;
б) $\operatorname{tg}(2x-3)$;	г) $\frac{1}{(2x-1)^3}$;	е) $\sqrt{\sin x}$.

6 Найдите производные функций.

а) $\frac{x + \cos 2x}{x-1}$; в) $4x^3 + \frac{\cos x}{x^3} - 3\sqrt{2x}$; д) $\cos(x^2 + x\sqrt{x})$;

б) $\operatorname{tg} \frac{x}{x+1}$; г) $7x^4 + (x+1)^4$; е) $\frac{\sin x + \cos 2x}{\sin 2x}$.

7 Докажите, что справедливо равенство:

$$(f(x)g(x)h(x))' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

8 Найдите значение $f'(0)$, $f'(1)$ и $f'(-1)$.

а) $f(x) = \frac{3x^3 + x^2 - 1}{3x+1}$; в) $f(x) = \frac{1}{\pi} \sqrt{1 + \sin \frac{\pi x}{3}}$;

б) $f(x) = x^4 \cos \pi x$; г) $f(x) = (x-1)^4 (x+1)^5$.

9 Найдите точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю.

а) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3x - 1$; в) $f(x) = x + \sin x$;

б) $f(x) = \frac{1+2x+x^2}{x-3}$; г) $f(x) = \frac{16}{x} + x + 20$.

10 Найдите точки, в которых производная функции $f(x)$ положительна.

а) $f(x) = x^2 - 2x$; в) $f(x) = \frac{2x+4x^2}{x^2+1}$;

б) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$; г) $f(x) = x^3 + 2x + \frac{1}{x}$.

11 Какие из равенств для функции $f(x) = \frac{1+x^2}{(x+1)^2}$ верны?

а) $f'(-\frac{1}{2}) + f'(0) + f'(1) = -26$; в) $16f'(3) + 25f'(4) + 9f'(5) = \frac{38}{15}$;

б) $f'(-\frac{1}{3}) + f'(\frac{1}{2}) + f'(2) = -9$; г) $f'(-2) + 343f'(6) + 27f'(-4) = 25$.

12 Найдите производные.

а) $\left(\left(\frac{x+1}{x-1} \right)' \right)'$; в) $\left(\left(x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{x} \right)' \right)'$;

б) $\left((x^2 + \sin 2x)' \right)'$; г) $\left(((x-2)^3 x^4 + x^2)' \right)'$.

13 Найдите производные.

а) $\left(\left(\left(8x^6 + x^3 + 4x^5 + \frac{1}{x^2} \right)' \right)' \right)'$; в) $\left(\left(\left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x + 3} \right)' \right)' \right)'.$

14 Покажите, что $2f'(1) - g'(-1) = \pi$, если $f(x) = \frac{x + \cos \pi x}{x - 2 \sin \pi x}$, $g(x) = \frac{x + \sin \pi x}{x - 2 \cos \pi x}$.

15 При каких значениях x верно равенство $(x^2 + 5x - 1)' > (2x^2 - 3x + 2)'$?

П

16 Найдите производные функций.

а) $y = \frac{5x^2 + 6x + 2}{3x^2 - 2x + 1}$; в) $y = \frac{9x^2 - 6x + 9}{-2x^2 + 2x + 6}$;
б) $y = \frac{10x - 8}{-x^2 - 6x - 7}$; г) $y = \frac{7x^2 + 10x + 8}{9x^2 - 9x - 8}.$

17 Найдите производные функций.

а) $y = \sin \sqrt{\frac{x+7}{x+8}}$; в) $y = \operatorname{tg} \sqrt{\frac{9x+6}{6x+8}}$;
б) $y = \cos \frac{\sqrt{4x+6}}{\sqrt{3x+9}}$; г) $y = \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x+5}}.$

18 Найдите производные функций.

а) $y = (x-3)^3 (x+1)^2 (x+2)$; в) $y = x^3 (x-1)^2 (2x+3)$;
б) $y = (x+1)^4 (x-1)^4 (x-3)^2$; г) $y = x(x-1)^2 (x+1)^2 (x^2+1)^2.$

19 Докажите, что если многочлен $P(x)$ степени n может быть представлен в виде $P(x) = (x-a)^k p(x)$, где k – натуральное число, такое что $k \geq 2$, а $p(x)$ – многочлен степени $n-k$, то $P'(a) = 0$.

20 Верно ли, что:

а) если $f(x) > g(x)$ при $x \in (a; b)$, то и $f'(x) > g'(x)$ при $x \in (a; b)$?

б) если $f(x) \neq g(x)$ при всех $x \in (a; b)$, то может ли быть, что $f'(x) = g'(x)$ при всех $x \in (a; b)$?

Обоснуйте свой ответ.

21 Докажите тождества.

$$\text{а) } \left(\frac{\cos x + \sin 2x}{\cos x - \sin 2x} \right)' = \frac{4 \cos x}{(1 - 2 \sin x)^2}; \quad \text{б) } \left(\frac{\sin \frac{x}{2} + 3 \operatorname{tg} \frac{x}{4}}{\sin \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{4}} \right)' = 2 \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}.$$

22 Докажите, что функция $y(x) = \frac{3 - \cos x - \sin x}{2}$ удовлетворяет уравнению $2y'(x) + \cos x = \sin x$.

23 Докажите, что верно равенство $(x^2 \sin x)' - x(x \sin x)' = x \sin x$.

24 Докажите, что верно равенство $\left(\left((x \cos x)' \right)' \right)' = x \sin x - 3 \cos x$.

M

25 Докажите, что функция $y(x) = bx + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{3}b^2x^3 - \frac{1}{2}abx^4 - \frac{1}{5}a^2x^5$ при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ удовлетворяет уравнению $\frac{y'(x)}{ax^2 + bx} + ax^2 + bx = \frac{1}{x}$.

26 Докажите равенство $\frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{x} + x \right)^3 \right)' - \frac{1}{2x} \left(\left(\frac{1}{x} + x \right)^2 \right)' + \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x} + x \right)' = \frac{x^6 - 1}{x^4}$.

27 Пользуясь теоремой о производной обратной функции, докажите равенства.

$$\text{а) } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{в) } (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$\text{б) } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{г) } (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

ГЛАВА V

Применение производной

5.1. Геометрический и механический смысл производной

Как вы помните, одной из рассмотренных нами в начале параграфа 4.6 задач, приводящих к понятию производной, была задача об угловом коэффициенте касательной. При её решении было установлено, что угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 равен пределу

$$k_{\text{кас.}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$
 Тогда мы на этом и остановились, констатируя, что такого вида

пределы появляются во многих ситуациях, и поэтому заслуживают того, чтобы их подробно изучать.

В параграфах 4.6 и 4.7 мы как раз и занимались этим изучением, и теперь знаем, что такой предел – это производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 :

$$k_{\text{кас.}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

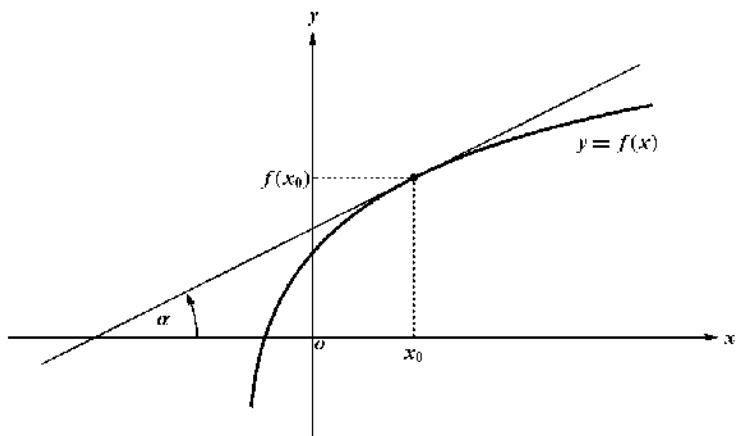


Рис. 5.1

Этот результат называется *геометрическим смыслом производной* и формулируется следующим образом:

Производная функции в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке $(x_0; f(x_0))$.

Поскольку угловой коэффициент касательной, как и всякой прямой, – это тангенс её угла наклона к положительному направлению оси абсцисс, то обозначая этот угол через α , можно предыдущую формулу переписать также в виде $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ (рис. 5.1).

В том же параграфе 4.6, рассматривая вопрос об угловом коэффициенте касательной, мы отметили, что найдя этот угловой коэффициент и зная, что касательная проходит через точку $(x_0; f(x_0))$, мы сможем записать уравнение касательной. Сейчас мы это сделаем.

Поскольку угловой коэффициент касательной равен $f'(x_0)$, её уравнение имеет вид: $y = f'(x_0)x + b$. Для нахождения b подставим в это уравнение координаты точки $(x_0; f(x_0))$. Получим: $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$, откуда $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$. Теперь подставляя это выражение для b в уравнение $y = f'(x_0)x + b$, будем иметь: $y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$, или, вынося за скобки общий множитель $f'(x_0)$ первого и третьего слагаемых: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Итак, мы установили следующий результат:

Уравнение касательной к графику дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ имеет вид: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Пример 1. В какой точке графика функции $y = \frac{x+3}{x+2}$ касательная к нему составляет с положительным направлением оси Ox угол 135° ?

Решение. Воспользуемся формулой $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, в которой $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$, $\alpha = 135^\circ$. Вычислим производную:

$$f'(x) = \left(\frac{x+3}{x+2} \right)' = \frac{(x+3)'(x+2) - (x+3)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{(x+2) - (x+3)}{(x+2)^2} = -\frac{1}{(x+2)^2}.$$

Таким образом, $f'(x_0) = -\frac{1}{(x_0 + 2)^2}$, а поскольку $\operatorname{tg} 135^\circ = -1$, то получаем уравнение $-\frac{1}{(x_0 + 2)^2} = -1$, откуда $(x_0 + 2)^2 = 1$, а значит, $x_0 + 2 = 1$ или $x_0 + 2 = -1$.

Итак, мы нашли два значения x_0 : $x_0 = -1$ и $x_0 = -3$. Это абсциссы нужных точек касания. Поскольку в ответе нужно указать точки графика, найдём соответствующие ординаты: $f(-1) = 2$; $f(-3) = 0$.

Ответ: $(-1; 2)$; $(-3; 0)$.

Пример 2. На рис. 5.2 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему, проведённая в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 .

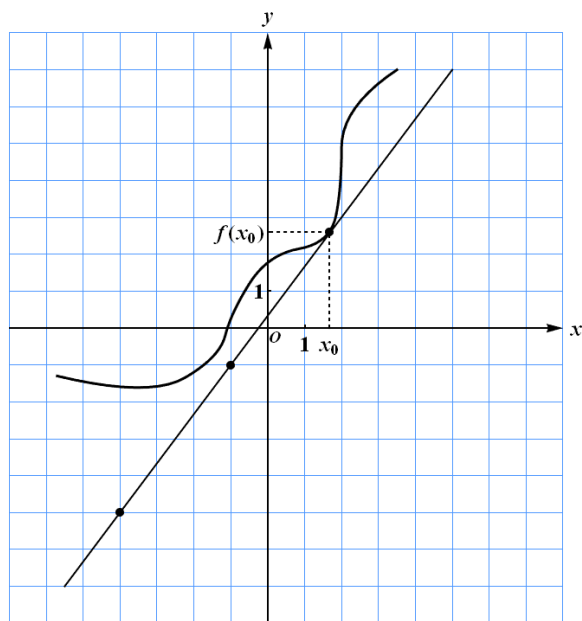


Рис. 5.2

Решение. Здесь удобней всего воспользоваться формулой $f'(x_0) = k_{\text{кас.}}$. Для нахождения углового коэффициента касательной достаточно знать координаты двух расположенных на ней точек. Поскольку чертёж приведён на клетчатой бумаге со стороной клетки 1, нужно поискать на касательной две точки с целыми

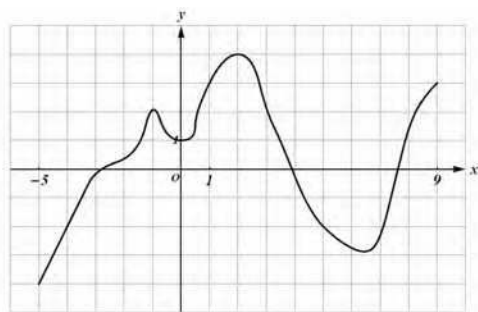
координатами. Такими, например, являются $(-1; -1)$ и $(-4; -5)$ – они отмечены на рисунке как жирные точки. Теперь осталось применить формулу для нахождения углового коэффициента прямой, проходящей через две точки: нужно разность ординат разделить на разность абсцисс: $\frac{-1 - (-5)}{-1 - (-4)} = \frac{3}{4} = 0,75 = \frac{3}{4}$.

Ответ: $\frac{4}{3}$.

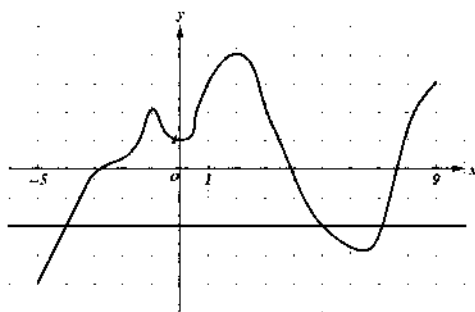
Замечание. Для тех, кто не знаком с использованной формулой, приведём её вывод. Пусть прямая с уравнением $y = kx + b$ проходит через две различные точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. Подставляя их координаты в уравнение этой прямой, получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными k и b :
$$\begin{cases} kx_1 + b = y_1, \\ kx_2 + b = y_2. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим: $k(x_1 - x_2) = y_1 - y_2$, откуда и получается требуемое $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

Пример 3. На рис. 5.3 а изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-5; 9)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 7$ или совпадает с ней.



а)



б)

Рис. 5.3

Решение. Сразу заметим, что нам дан график производной функции $y = f'(x)$, т.е. график функции $y = f''(x)$, а вопрос относится к графику функции $y = f(x)$, которого у нас нет.

Вспомним условие параллельности или совпадения двух прямых. Оно заключается в том, что их угловые коэффициенты равны. У касательной угловой коэффициент равен $k_{\text{кас.}}$, а у прямой $y = -2x - 7$ угловой коэффициент равен -2 . Отсюда заключаем, что $k_{\text{кас.}} = -2$. Но согласно геометрическому смыслу производной $k_{\text{кас.}} = f'(x_0)$. Таким образом, нужно выяснить, сколько имеется таких точек x_0 , в которых $f'(x_0) = -2$. Для этого нужно посмотреть, сколько точек пересечения имеет график $y = f'(x)$ с горизонтальной прямой $y = -2$. Из рис. 5.3 б видно, что таких точек имеется 3.

Ответ: 3.

Пример 4. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - 2x - 1$ в точке с абсциссой 2.

Решение. В обозначениях формулы уравнения касательной $f(x) = x^3 - 2x - 1$; $x_0 = 2$. Находим производную $f'(x) = 3x^2 - 2$. Теперь имеем:

$$f(x_0) = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 - 1 = 3; \quad f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 = 10.$$

Подставим найденные числа в уравнение касательной, получим:

$$y = 3 + 10(x - 2), \text{ или } y = 3 + 10x - 20, \text{ или окончательно } y = 10x - 17.$$

Ответ: $y = 10x - 17$.

В предыдущем примере абсцисса точки касания была известна. Встречаются ситуации, когда это не так.

Пример 5. Запишите уравнение касательной, проведённой из точки $(1; -6)$ к параболе $y = x^2 + 4x + 6$.

Решение. Здесь ясно, что точка $(1; -6)$ на нашей параболе не лежит, а значит, абсциссу точки касания мы не знаем.

Традиционное решение этой задачи такое. Пусть x_0 – неизвестная абсцисса точки касания. У нас $f(x) = x^2 + 4x + 6$, значит, $f'(x) = 2x + 4$, и поэтому $f(x_0) = x_0^2 + 4x_0 + 6$, $f'(x_0) = 2x_0 + 4$ и уравнение касательной имеет следующий громоздкий вид: $y = x_0^2 + 4x_0 + 6 + (2x_0 + 4)(x - x_0)$.

Поскольку эта касательная проходит через точку $(1; -6)$, подставим координаты этой точки в уравнение касательной ($x = 1$; $y = -6$):

$$-6 = x_0^2 - 4x_0 + 6 + (2x_0 - 4)(1 - x_0).$$

Мы получили уравнение с неизвестным x_0 . После раскрытия скобок и приведения подобных оно имеет вид $x_0^2 - 2x_0 - 8 = 0$. Его корни $x_0 = -2$ и $x_0 = 4$.

Подставляя каждое из найденных двух чисел в уравнение касательной $y = x_0^2 - 4x_0 + 6 + (2x_0 - 4)(x - x_0)$, получим уравнения двух касательных: $y = -8x + 2$ и $y = 4x - 10$.

Ответ: $y = -8x + 2$ и $y = 4x - 10$.

При решении многих задач, связанных с касанием, полезно применять условие касания двух графиков. Два графика называются касающимися в некоторой точке, если они имеют в этой точке общую касательную. Условие касания двух графиков следующее: Графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ касаются в точке с абсциссой t в том и

только в том случае, когда
$$\begin{cases} f(t) = g(t), \\ f'(t) = g'(t) \end{cases} \text{ (равны функции и равны их производные).}$$

Мы обозначили абсциссу точки касания не традиционно x_0 , а t , поскольку при дальнейшем решении возникшей системы работать с буквой с индексом довольно неудобно.

Решим предыдущую задачу с помощью условия касания графиков.

Пусть графики $y = x^2 + 4x + 6$ и $y = kx + b$ касаются в точке с абсциссой t . Тогда:

$$\begin{cases} t^2 - 4t + 6 = kt + b, \\ (t^2 - 4t + 6)' = (kt + b)' \end{cases} \text{ или } \begin{cases} t^2 - 4t + 6 = kt + b, \\ 2t - 4 = k. \end{cases}$$

Поскольку прямая $y = kx + b$ проходит через точку $(1; -6)$, то подставляя координаты этой точки в уравнение прямой, получим: $-6 = k + b$.

$$\text{В результате получаем систему уравнений } \begin{cases} t^2 - 4t + 6 = kt + b, \\ 2t - 4 = k, \\ k + b = -6. \end{cases}$$

Выражая из второго уравнения $k = 2t - 4$, а из третьего $b = -6 - k$, т.е. $b = -2 - 2t$ и подставляя в первое уравнение, получим квадратное уравнение $t^2 - 4t + 6 = (2t - 4)t - 2 - 2t$, или после преобразований, $t^2 - 2t - 8 = 0$ — точно такое же, как и при первом способе решения.

Зная два разных подхода к решению задач на касание, можно выбирать в каждом случае тот, который кажется более перспективным.

В начале параграфа 4.6, кроме задачи об угловом коэффициенте касательной, нами была рассмотрена ещё одна задача, приводящая к понятию производной – задача о нахождении мгновенной скорости прямолинейного движения.

Было установлено, что если точка движется по прямой, скажем, по оси Ox , и её координата x является функцией времени t , т.е. $x = x(t)$, то нахождение мгновенной скорости $v(t_0)$ точки в момент времени t_0 сводится к вычислению предела

$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Сейчас мы уже знаем, что этот предел является производной функции $x(t)$ в точке t_0 , и тем самым можно записать равенство: $v(t_0) = x'(t_0)$.

Мгновенная скорость точки, движущейся прямолинейно, есть производная от её координаты.

В этом и заключается *механический смысл производной*.

Чаще всего выражающую его формулу записывают в виде: $v(t) = x'(t)$.

Пример 6. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 3t^3 - 2t^2 + 4t$, где x – расстояние от начала отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 10$ с.

Решение. Поскольку скорость есть производная от координаты, имеем:

$$v(t) = x'(t) = (3t^3 - 2t^2 + 4t)' = 9t^2 - 4t + 4.$$

Подставив в полученную формулу для скорости $t = 10$, находим:

$$v(10) = 9 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 + 4 = 864.$$

Ответ: 864 м/с.

Аналогично можно установить, что ускорение есть производная скорости:

$$a(t) = v'(t).$$

Н

1 а) Что задает производная функции в точке?

б) Как найти уравнение касательной к функции в данной точке?

в) В каком случае касательная составляет с положительным направлением оси Ox острый угол? Тупой угол?

2 На рис. 5.4 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 .

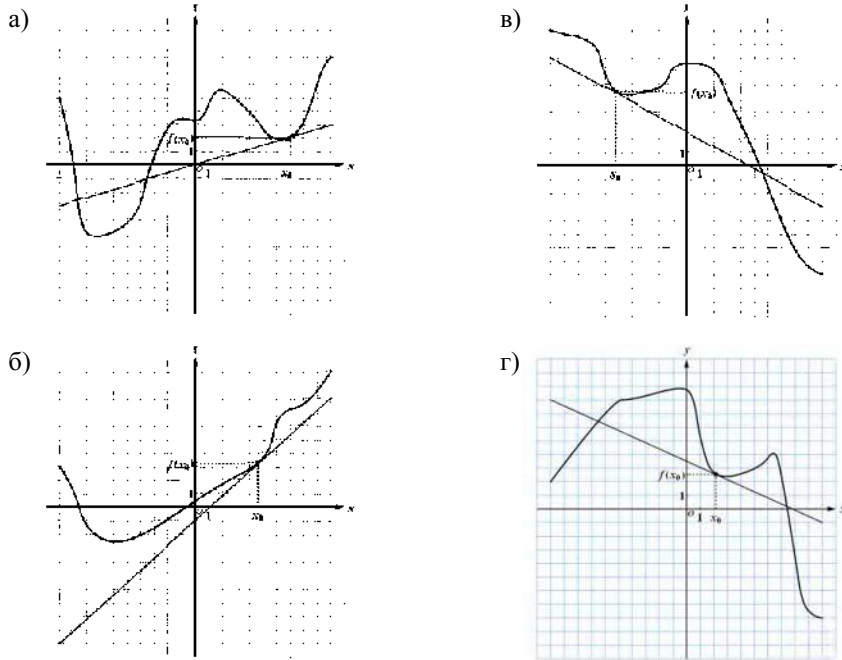


Рис. 5.4

3 На рис. 5.5 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-10; 10)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x + 2\sqrt{3} - 11$ или совпадает с ней.

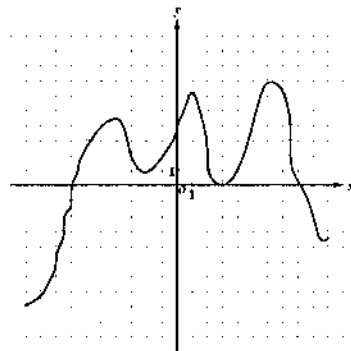


Рис. 5.5

- 4 На рис. 5.6 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-10; 10)$. Найдите абсциссы тех точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -6x - \frac{23}{5}$ или совпадает с ней.

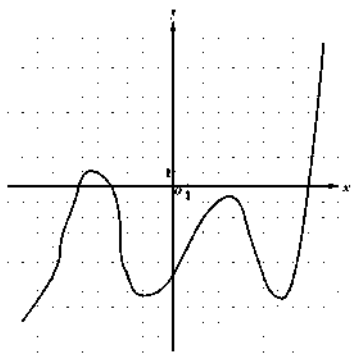


Рис. 5.6

- 5 Определите, в каких точках графика функции $y = x^2 + \frac{1}{x}$ касательная к нему параллельна прямой $y = -3x + 27$ или совпадает с ней.
- 6 В каких точках графика функции $y = \sqrt{2x+4}$ касательная к нему параллельна прямой $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x + 27$ или совпадает с ней?
- 7 Материальная точка движется закону $x(t)$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её скорость и ускорение в момент времени $t = 1$ с.
- а) $x(t) = \sqrt{t} + t^2 + \frac{1}{t+1}$; в) $x(t) = \frac{2 \sin \pi t}{\sin 2\pi t + 3} + t$;
- б) $x(t) = \frac{t^2}{t^2 + 1} + \frac{t}{t^4 + 1}$; г) $x(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{1+t+t^2} - \sqrt{1+t^3}$.
- 8 В какой точке графика функции $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 17$ касательная к нему составляет с положительным направлением оси Ox угол 30° ?
- 9 В какой точке графика функции $y = \sqrt{2x+x^2}$ касательная к нему составляет с положительным направлением оси Ox угол 60° ?

П

10 Материальная точка движется закону $x(t)$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени величина ускорения и скорости точки численно равны?

а) $x(t) = \frac{2t+1}{t+3}$; б) $x(t) = t^4 - \frac{8}{3}t^3 - 1$.

11 Найдите общий вид уравнения касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ и максимально упростите его.

а) $f(x) = \frac{1+2x+3x^2}{2x-3x^2}$; в) $f(x) = x(x+1)^2(2x-1)^2$;
б) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{\frac{x+2}{x}} + x$; г) $f(x) = \frac{\sin 2x + \cos x}{\cos x + 2}$.

12 Запишите уравнения общих касательных к графикам функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$.

а) $f_1(x) = \frac{3x^2+x+2}{3}$, $f_2(x) = (\sqrt{2}-x)x + \frac{29+6\sqrt{2}}{72}$;
б) $f_1(x) = \frac{2x-4}{3x-2}$, $f_2(x) = \frac{4x+10}{5x+13}$;
в) $f_1(x) = \sqrt{x+14-4\sqrt{6}} - 2x$, $f_2(x) = \sqrt{x+14+4\sqrt{6}} - x$;
г) $f_1(x) = 17+x^2+x^3$, $f_2(x) = 13+4x^2+2x^3$.

13 Две материальные точки движутся по законам $x_1(t) = t^3 + 4t^2 + 7t$ и $x_2(t) = 2t^3 + 2t^2 + 3t$, где x_1 и x_2 – расстояния от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени они прошли одинаковое расстояние? Какая из них раньше пройдет 30 м? 150 м? В какой момент времени они двигались с одинаковой скоростью? Одинаковым ускорением?

14 Две материальные точки движутся по законам $x_1(t) = \frac{x+2}{x+3} - \frac{2}{3}$ и $x_2(t) = \frac{2x+1}{3x+2} - \frac{1}{2}$, где x_1 и x_2 – расстояния от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени они прошли одинаковое расстояние? В какой момент времени они двигались с одинаковой скоростью? Одинаковым ускорением?

М

15 Рассмотрим две функции: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ и $g(x) = dx^3 + cx^2 + bx + a$. Найдите все такие точки x_0 , в которых касательные, проведённые к рассматриваемым кривым, параллельны, если известно, что $b \geq c$, $3a + b \geq c + 3d$, $a \neq d$.

16 При каком значении k прямая $y = kx + 2$ касается графика функции $y = -x^2 + 4x - 8$? В какой точке?

17 При каком значении k прямая $y = kx + \frac{22}{9}$ касается графика функции $y = \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 - 3x + 1}$? В какой точке?

18 При каком значении b прямая $y = (-2 + \sqrt{-7 + 5\sqrt{2}})x + b$ касается графика функции $y = \sqrt{\frac{x}{x+1}} - 2x$ в области $x \geq 0$? В какой точке?

19 При каком значении k прямая $y = kx + \frac{14}{9}$ касается графика функции $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$? В какой точке?

20 Покажите, что уравнение касательной к графику функции $F(x) = \frac{ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f}{fx^5 + ex^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a}$, $a, b, c, d, e, f \neq 0$ в точке $x_0 = 0$ не зависит от коэффициента c . При каких значениях параметров a, b, d, e, f касательная к графику функции $F(x)$ в точке $x = 0$ существует и является возрастающей функцией? Убывающей функцией?

5.2. Исследование функции на экстремумы и монотонность

Точка x_0 называется точкой максимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0 , что во всех точках этой окрестности функция

определена и при всех $x \in U(x_0)$, таких что $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. Другими словами, значение функции в точке максимума больше, чем во всех остальных точках этой окрестности. Значение функции в точке максимума называется максимумом.

Некоторые считают фразу об определённости функции $f(x)$ всех точках этой окрестности $U(x_0)$ излишней, читая, что раз сказано, что неравенство $f(x) < f(x_0)$ выполняется при всех x из этой окрестности, то автоматически понятно, что функция определена (логика такова: раз $f(x)$ записано, то оно существует). Понятно, что говорить всё очень подробно или учитывать для краткости такого рода соображения – это дело вкуса. Мы будем стараться говорить подробно.

К тому же надо честно признать, что в изучаемом разделе математики нет общепринятых договорённостей в терминологии.

Скажем, в некоторых книгах в определении точки максимума пишут нестрогое неравенство $f(x) \leq f(x_0)$, в некоторых – строгое $f(x) < f(x_0)$, а в некоторых – различают точку нестрогого максимума и точку строгого максимума. Можно привести ещё целый ряд примеров.

Здесь нет ничего страшного. Человек, изучивший рассматриваемую тему для какого-то одного варианта терминологии, сможет без труда разобраться и в другом варианте. Но вот при освоении темы лучше последовательно придерживаться какого-то одного варианта терминологии. Например, если вы учитесь по этому учебнику, то такого, как в этом учебнике.

Определение точки минимума аналогично. Точка x_0 называется точкой минимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0 , что во всех точках этой окрестности функция определена и при всех $x \in U(x_0)$, таких что $x \neq x_0$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$. Другими словами, значение функции в точке минимума меньше, чем во всех остальных точках этой окрестности. Значение функции в точке минимума называется минимумом.

Объединяющее название для точки максимума и точки минимума – точка экстремума, а объединяющее название для максимума и минимума – экстремум.

Если функция непрерывна в точке x_0 и в окрестности, о которой идёт речь, то типичная картина точки максимума изображена на рис. 5.7 (два верхних графика) – холм (вершина), либо пологий, либо с изломом. Если функция не является непрерывной в точке x_0 , то возможны и другие варианты, несколько из которых тоже изображены на рис. 5.7 (остальные графики).

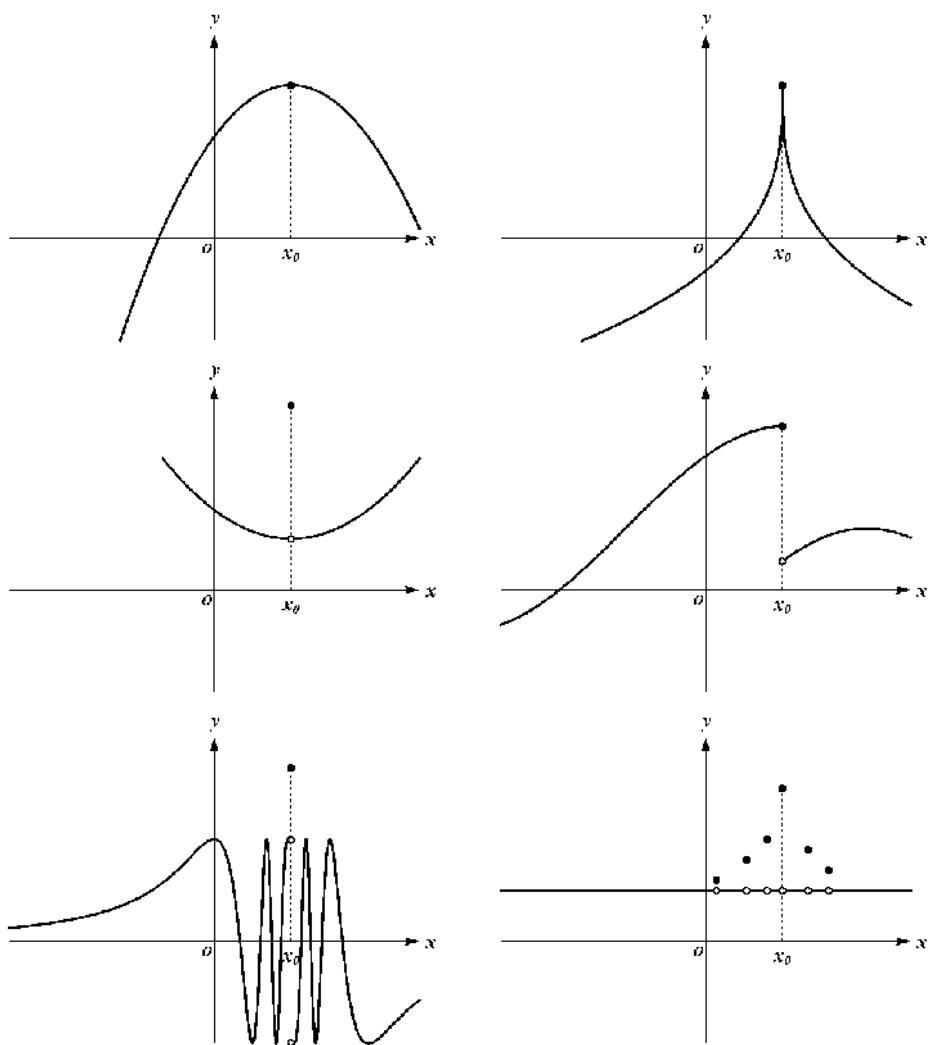


Рис. 5.7

Аналогичные рисунки можно себе представить и для точки минимума.

Сначала изучим следующий вопрос: Что можно сказать о точке экстремума для функции, имеющей производную на некотором открытом интервале $(a; b)$? Напомним, что такая функция называется дифференцируемой на этом интервале. Ответ оказывается следующим:

Если функция $f(x)$ определена и дифференцируема в некотором открытом интервале $(a; b)$, и $x_0 \in (a; b)$ – точка экстремума функции, то $f'(x_0) = 0$.

Проведём доказательство в случае, когда x_0 – точка максимума.

Вспомним, что производная – это предел:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Заметим, что поскольку x_0 – точка максимума и $\Delta x \neq 0$, то $x_0 + \Delta x \neq x_0$ и $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$, т.е. числитель дроби под знаком предела отрицателен.

Поскольку этот предел существует, то существуют оба односторонних предела*, причём они равны между собой.

Рассмотрим левосторонний предел: $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. Поскольку при

$\Delta x < 0$ дробь $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$ (как частное двух отрицательных чисел), то по теореме о переходе к (левостороннему) пределу в неравенстве получаем, что $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$, т.е. $f'(x_0) \geq 0$.

Аналогичное рассуждение можно провести для правостороннего предела. Поскольку при $\Delta x > 0$ дробь $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$ (как частное отрицательного и положительного чисел), то по теореме о переходе к (правостороннему) пределу в неравенстве получаем, что $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$, т.е. $f'(x_0) \leq 0$.

Теперь осталось заметить, что если одновременно $f'(x_0) \geq 0$ и $f'(x_0) \leq 0$, то это значит, что $f'(x_0) = 0$, и теорема доказана.

Эта теорема называется *теоремой Ферма* или *необходимым условием экстремума* для дифференцируемой функции.

Докажем с помощью теоремы Ферма ещё две теоремы.

Первая из них называется *теоремой Ролля*.

* Заметим, что в рассматриваемом случае левосторонний предел $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ называется левосторонней производной функции $f(x)$ в точке x_0 , а правосторонний предел – правосторонней производной.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема при всех $x \in (a; b)$ и $f(a) = f(b)$, то найдётся по крайней мере одна точка $t \in (a; b)$, такая, что $f'(t) = 0$.

Другая формулировка, без использования символики:

Если функция непрерывна на отрезке, дифференцируема внутри него и на концах отрезка принимает равные значения, то внутри отрезка найдётся по крайней мере одна такая точка, в которой производная этой функции равна нулю.

Геометрическая иллюстрация теоремы Ролля дана на рис. 5.8. У функции с рис. 5.8 а имеется одна точка, в которой производная равна нулю (т.е. касательная горизонтальна), а функции с рис. 5.8 б таких точек имеется несколько.

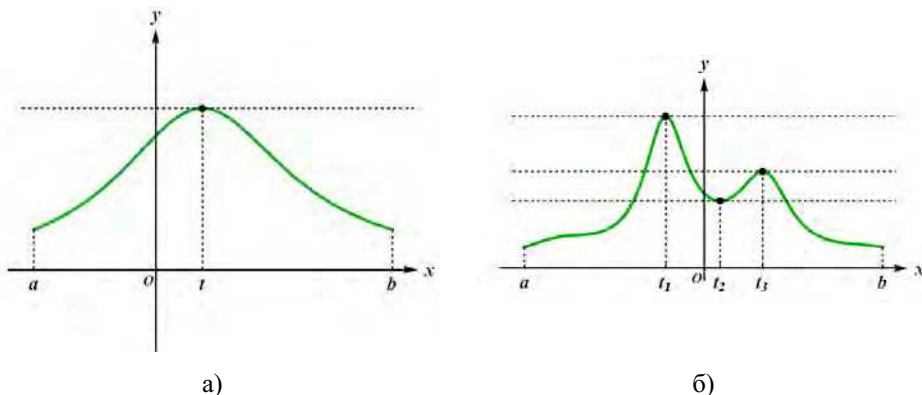


Рис. 5.8

Докажем теорему Ролля. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то по второй теореме Вейерштрасса она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения. Если эти наименьшее и наибольшее значения равны друг другу, то функция постоянная на всём отрезке $[a; b]$, а значит, её производная равна нулю при всех $t \in (a; b)$.

Если же эти наименьшее и наибольшее значения не равны друг другу, то по крайней мере одно из них отличается от чисел $f(a) = f(b)$, пусть, скажем, наибольшее. Тогда это наибольшее значение принимается не на конце отрезка, а в какой-то внутренней точке $t \in (a; b)$. Тогда по определению точка t является точкой максимума функции $f(x)$, и по теореме Ферма $f'(t) = 0$.

Теперь уже с помощью теоремы Ролля докажем одну из центральных теорем математического анализа – *теорему Лагранжа*.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема при всех $x \in (a; b)$, то найдётся по крайней мере одна точка $t \in (a; b)$, такая, что

$$f'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Последняя формула называется *формулой Лагранжа*.

Обратите внимание, условия теоремы Лагранжа такие же, как у теоремы Ролля, только не требуется, чтобы функция принимала на концах отрезка равные значения.

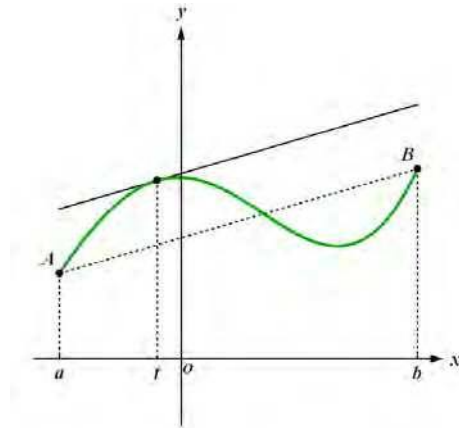


Рис. 5.9

Геометрическая иллюстрация теоремы Лагранжа, данная на рис. 5.9, такова. На графике непрерывной на отрезке и дифференцируема внутри него функции найдётся по крайней мере одна точка, касательная в которой параллельна хорде, соединяющей крайние точки графика. Действительно, угловой коэффициент прямой AB , проходящей через точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$, равен как раз выражению

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

стоящему в правой части формулы Лагранжа.

Теорема Лагранжа доказывается сведением к теореме Ролля. Наглядно это кажется почти очевидным: нужно график, изображённый на рис. 5.9, повернуть так, чтобы отрезок AB стал горизонтальным. Однако, во-первых, это не совсем правильно, а во-вторых, технически совсем непросто.

Обычно рассматривается вспомогательная функция:

$$g(x) = (f(b) - f(a))x - (b - a)f(x).$$

Убедимся, что функция $g(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Непрерывность на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемость при всех $x \in (a; b)$ очевидны. Вычислим значения $g(x)$ на концах отрезка $[a; b]$:

$$g(a) = (f(b) - f(a))a - (b - a)f(a) = af(b) - af(a) - bf(a) + af(a) = af(b) - bf(a);$$

$$g(b) = (f(b) - f(a))b - (b - a)f(b) = bf(b) - bf(a) - bf(b) + af(b) = af(b) - bf(a).$$

Таким образом, действительно $g(a) = g(b)$.

По теореме Ролля заключаем, что найдётся по крайней мере одна точка $t \in (a; b)$, такая, что $g'(t) = 0$. Найдём производную функции $g(x)$:

$$g'(x) = (f(b) - f(a)) - (b - a)f'(x).$$

Поэтому равенство $g'(t) = 0$ переписывается в виде:

$$(f(b) - f(a)) - (b - a)f'(t) = 0, \text{ или } f(b) - f(a) = f'(t) \cdot (b - a), \text{ или, наконец, в}$$

$$\text{требуемом виде } f'(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Заметим, что при решении многих задач формулу Лагранжа удобно записывать в одном из промежуточных видов, возникших при её доказательстве: $f(b) - f(a) = f'(t) \cdot (b - a)$.

Установим с помощью теоремы Лагранжа *достаточное условие монотонности* дифференцируемой функции.

В приведённой формулировке интервал может быть любым: открытым, замкнутым, полуоткрытым.

Если у функции, непрерывной на некотором интервале и дифференцируемой внутри него:

- а) производная положительна во всех точках внутри интервала, то функция возрастает на этом интервале;
- б) производная отрицательна во всех точках внутри интервала, то функция убывает на этом интервале;
- в) производная равна нулю во всех точках внутри интервала, то функция постоянна на этом интервале.

а) Возьмём внутри нашего интервала две произвольные точки u и v , такие что $u < v$. Тогда на интервале $[u; v]$ наша функция $f(x)$ непрерывна, а внутри него – дифференцируемая. По теореме Лагранжа, существует такая точка $t \in (u; v)$, что $f(v) - f(u) = f'(t) \cdot (v - u)$. Но по условию $f'(t) > 0$ во всех внутренних точках исходного интервала, а значит и во всех внутренних точках интервала $(u; v)$. Кроме

того $v-u > 0$, поскольку $u < v$. Таким образом, $f'(t) \cdot (v-u) > 0$, а значит, и $f(v) - f(u) > 0$, т.е. $f(u) < f(v)$. Доказано, что для любых u и v из данного в условии интервала, таких что $u < v$, выполняется неравенство $f(u) < f(v)$, т.е. функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

Пункты б) и в) доказываются аналогично.

Пример 1. Докажите, что функция $f(x) = x^3 + 5x$ возрастающая на всей области определения.

Решение. Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел. Вычислим производную: $f'(x) = 3x^2 + 5$. Но поскольку при всех действительных x выполняется неравенство $3x^2 + 5 > 0$, то по пункту а) доказанной теоремы функция $f(x) = x^3 + 5x$ возрастает на всей своей области определения.

Достаточное условие монотонности дифференцируемой функции позволяет исследовать функцию $f(x)$ на монотонность, вычисляя производную $f'(x)$ и решая соответственные неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.

Но есть способ, технически более удобный.

Для этого рассмотрим важное понятие *критической точки* функции.

Сначала напомним, что точка называется внутренней точкой множества, если в этом множестве полностью содержится некоторая окрестность этой точки. Скажем, точка 1 является внутренней точкой интервала $(0; 4]$, но не является внутренней точкой интервала $[1; 2)$.

Критической точкой функции называется внутренняя точка её области определения, в которой производная этой функции равна нулю или не существует.

Понятно, что при нахождении критических точек функции $f(x)$ нужно будет найти сначала производную $f'(x)$, затем решать уравнение $f'(x) = 0$, а также выяснять, в каких точках производная не существует. После этого нужно будет ещё проверять, являются ли все найденные точки внутренними точками области определения $D(f)$. В большинстве случаев это проще всего сделать, предварительно найдя $D(f)$.

Пример 2. Найдите критические точки функции $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2}$.

Решение. Область определения: $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

Вычислим производную:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2} \right)' = \frac{(x^2 - 3x + 3)'(x - 2) - (x^2 - 3x + 3)(x - 2)'}{(x - 2)^2} = \\ &= \frac{(2x - 3)(x - 2) - (x^2 - 3x + 3)}{(x - 2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 3x + 6 - x^2 + 3x - 3}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}. \end{aligned}$$

Производная не существует при $x = 2$. Но 2 не является критической точкой, поскольку она не входит в область определения $D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

Производная равна нулю при $\frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2} = 0$, т.е. при $x = 1$ и $x = 3$. Обе эти точки входят в область определения, причём являются её внутренними точками. Таким образом, обе они являются критическими точками исследуемой функции.

Ответ: 1 и 3.

Пример 3. Найдите критические точки функции $f(x) = \sqrt{x}$.

Решение. Область определения: $D(f) = [0; +\infty)$. Вычислим производную:

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Уравнение $f'(x) = 0$, т.е. $\frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ решений не имеет.

Из точек, принадлежащих области определения функции $D(f) = [0; +\infty)$, производная не существует при $x = 0$. Но точка 0 не является внутренней точкой области определения, значит, она не может являться критической.

Ответ: Функция не имеет критических точек.

Рассмотрим достаточное условие экстремума непрерывной функции, имеющей на интервале единственную критическую точку

Если на интервале $(a; b)$ непрерывная функция имеет единственную критическую точку x_0 , причём слева от этой критической точки производная положительна, т.е. $f'(x) > 0$ при всех $x \in (a; x_0)$, а справа отрицательна, т.е. $f'(x) < 0$ при всех $x \in (x_0; b)$, то эта критическая точка является точкой максимума.

Действительно, по доказанному выше достаточному условию монотонности дифференцируемой функции заключаем, что функция $f(x)$ возрастает на интервале $(a; x_0]$, а значит, $f(x) < f(x_0)$ при всех $x \in (a; x_0)$. Точно так же функция $f(x)$

убывает на интервале $[x_0; b)$, а значит, $f(x) < f(x_0)$ при всех $x \in (x_0; b)$. Таким образом, при всех $x \in (a; b)$, таких что $x \neq x_0$, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$, т.е. x_0 действительно является точкой максимума.

Кратко доказанное утверждение формулируют так: Если при переходе через критическую точку производная меняет знак с «+» на «-», то это точка максимума.

Аналогично кратко формулируется утверждение: Если при переходе через критическую точку производная меняет знак с «-» на «+», то это точка минимума.

Наконец, если при переходе через критическую точку производная не меняет знака, то такая критическая точка не является точкой экстремума.

При решении задач удобно пользоваться следующей схемой исследования функции на экстремумы и монотонность:

- 1) Находится область определения $D(f)$ функции $f(x)$.
- 2) Находится производная $f'(x)$.
- 3) Находятся критические точки функции $f(x)$.
- 4) Изображается область определения $D(f)$ и на неё наносятся критические точки (закрашенными).
- 5) На каждом из образовавшихся интервалов определяется знак производной (с помощью пробной точки или других соображений).
- 6) На тех интервалах, где производная положительна, функция возрастает, а на тех интервалах, где производная отрицательна, функция убывает.
- 7) Если при переходе через критическую точку производная меняет знак с «+» на «-», то это точка максимума, а если с «-» на «+», то это точка минимума.

В качестве комментария к этой схеме добавим, что пункт 2 следовало бы сформулировать более категорично. Нужно найти производную и максимально упростить её. Идеальный вариант – разложить на множители. Понятно, что при таком виде производной будет гораздо проще находить её нули и определять её знак.

Пример 4. Исследуйте функцию $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 5$ на экстремумы и монотонность.

Решение. Будем следовать предложенной схеме.

Область определения $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

Производная $f'(x) = 12x^3 + 12x^2 = 12x^2(x+1)$

Производная равна нулю при $x = 0$ и $x = -1$. Обе эти точки входят в область определения, причём являются её внутренними точками.

Точек, в которых производная не существует, нет.

Изображаем область определения – всю числовую ось, и наносим на неё критические точки 0 и -1 (закрашенными) (рис. 5.10). Обычно над осью принято отображать информацию о производной (знак производной), а под осью – о функции (возрастание или убывание). Вся эта информация приведена на рис. 5.10.

Поскольку при переходе через критическую точку -1 производная меняет знак с « $-$ » на « $+$ », то это точка минимума. Записывают это обычно так: $x_{\min} = -1$.

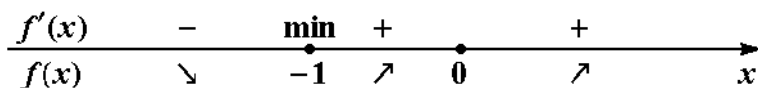


Рис. 5.10

Критическая точка 0 не является точкой экстремума, поскольку при переходе через неё производная не меняет знака.

Можно вычислить значение функции в точке минимума – минимум:

$$y_{\min} = f(x_{\min}) = f(-1) = 3 - 4 + 5 = 4.$$

Заметим, что два соседних интервала возрастания $[-1; 0]$ и $[0; +\infty)$ можно объединить в один, поскольку функция $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 5$ непрерывна в точке 0 – точке их «склейки».

Ответ: $x_{\min} = -1$; $y_{\min} = 4$; интервал возрастания $[-1; +\infty)$, интервал убывания $(-\infty; -1]$.

Пример 5. На рис. 5.11 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-4; 18)$. Найдите количество точек минимума функции $y = f(x)$.

Решение.

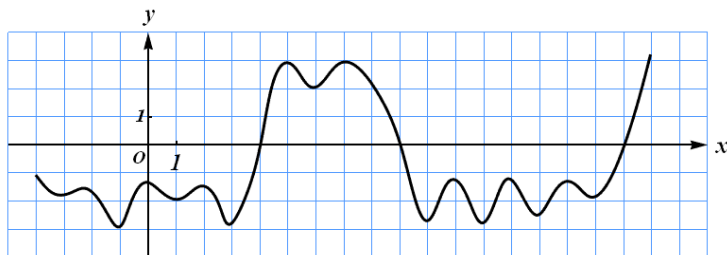


Рис. 5.11

Будем также следовать предложенной схеме.

Область определения здесь находить не надо, она задана в условии:

$$D(f) = (-4; 18).$$

Производная $y = f'(x)$ задана своим графиком, приведённым на рис. 5.11.

Из этого графика видно, что таких точек, в которых производная $f'(x)$ не существует, на интервале $(-4; 18)$ нет. Из графика также видно, что $f'(x) = 0$ при $x = 4$; $x = 9$ и $x = 17$.

Изображаем область определения – интервал $(-4; 18)$, и наносим на неё критические точки 4; 9 и 17 (закрашенными) (рис. 5.12).

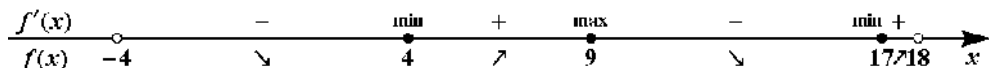


Рис. 5.12

Из графика производной также видно, какой знак она имеет на каждом из образовавшихся интервалов (рис. 5.12).

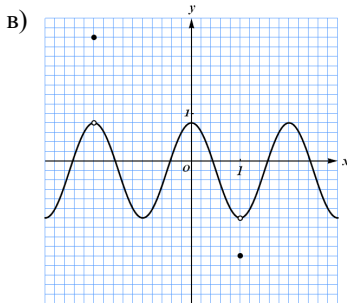
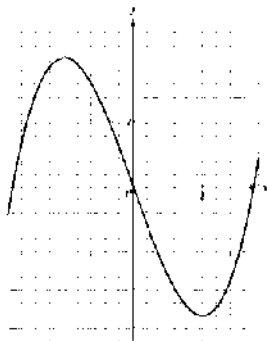
Производная меняет знак с «-» на «+» при переходе через две критические точки: 4 и 17. Это точки минимума. Заметим, кстати, хотя для решения это и не нужно, что 9 является точкой максимума, т.к. при переходе через неё производная меняет знак с «+» на «-».

Таким образом, количество точек минимума равно 2.

Ответ: 2.

Н

- 1 Известно, что $f'(a) = 0$ и $f'(x) > 0$ при $x > a$. В каком случае точка $x = a$ будет точкой максимума? минимума? не будет точкой ни максимума ни минимума?
- 2 Может ли быть так, что $f'(a)$ не существует, но при $x = a$ функция $f(x)$ имеет максимум? минимум?
- 3 Найдите точки максимума и минимума функций.



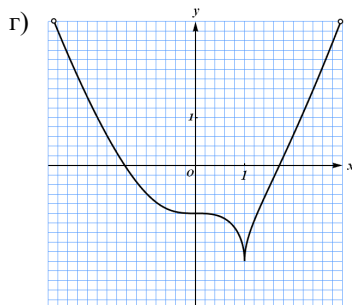
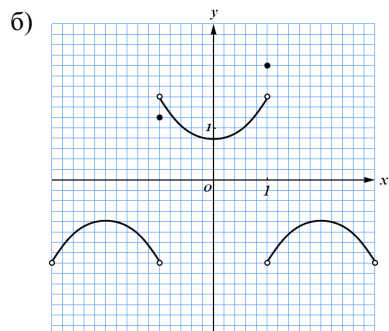


Рис. 5.13

4 Найдите точки, в которых производная функции обращается в нуль.

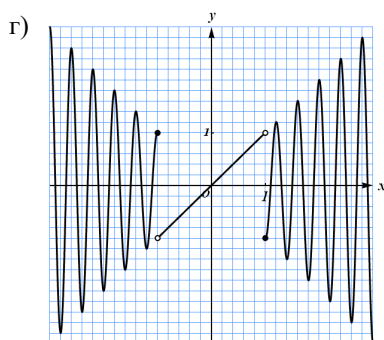
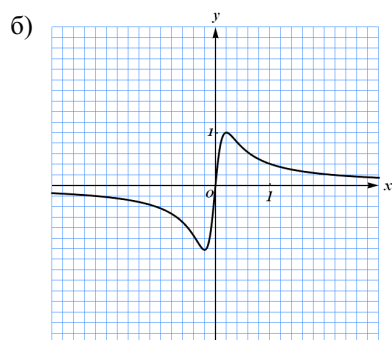
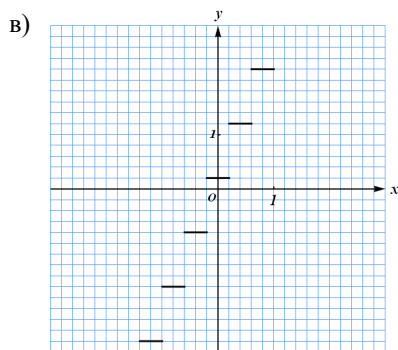
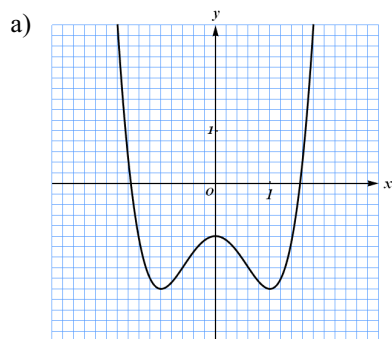
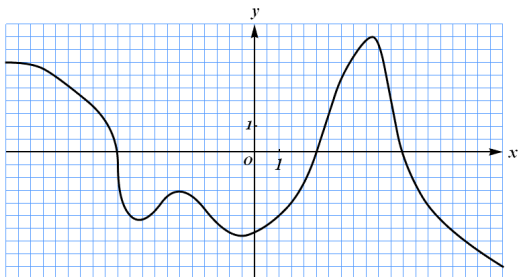


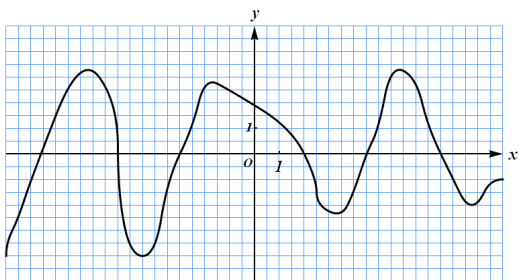
Рис. 5.14

5 По графику производной найдите точки максимума и минимума функции.

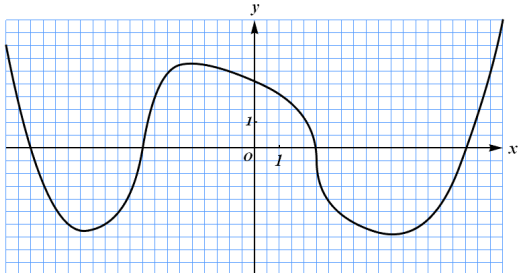
а)



б)



в)



г)

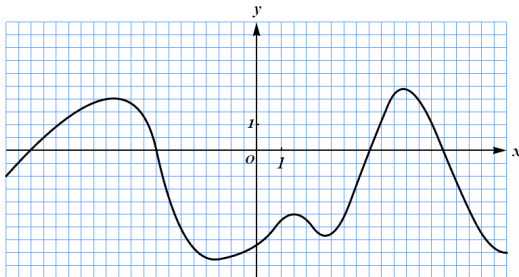
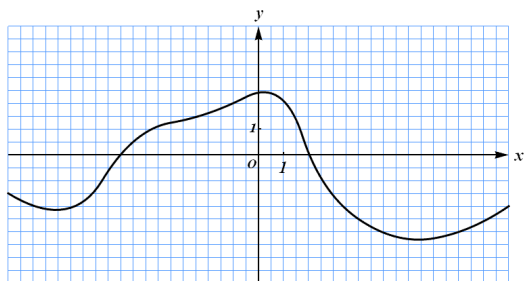


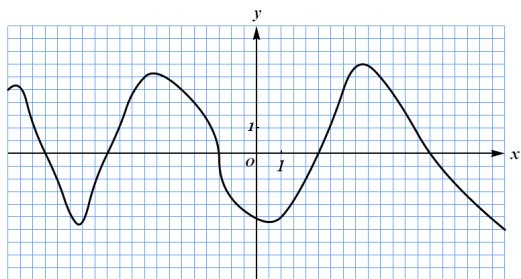
Рис. 5.15

6 По графику производной найдите интервалы, на которых функция возрастает и убывает.

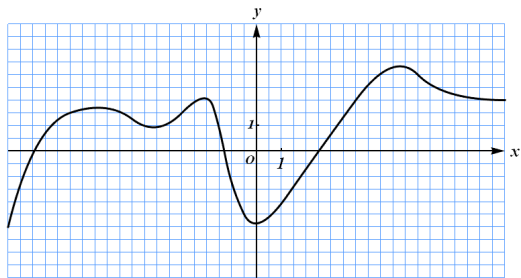
а)



б)



в)



г)

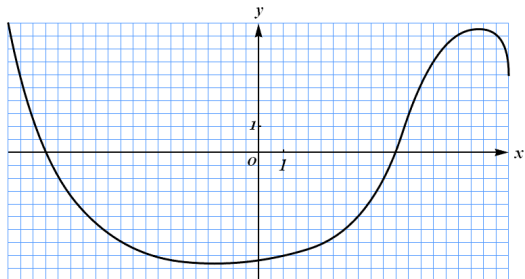


Рис. 5.16

- 7 По графику производной, найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 2\sqrt{3}$.

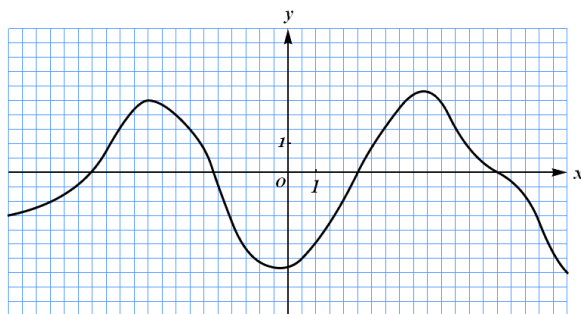


Рис. 5.17

- 8 По графику производной, найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -x + 2$.

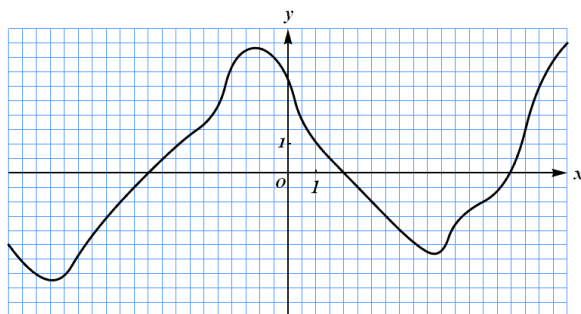


Рис. 5.18

- 9 По графику производной, найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 3,5x - 11$.

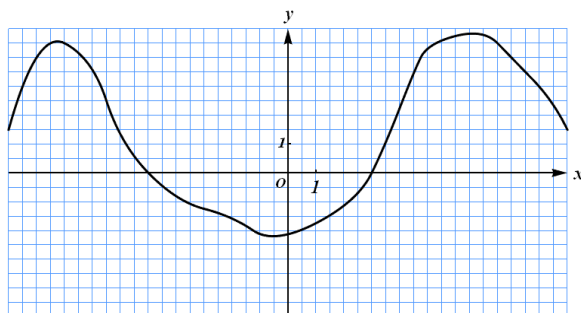


Рис. 5.19

10 Найдите точки, в которых касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.

а) $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 1$;

в) $f(x) = \frac{2x^2 + 12}{2x + 1}$;

б) $f(x) = 6x^2 - 4x + 1$;

г) $f(x) = x - \frac{2x}{x + 2}$.

11 Найдите точки максимума и минимума функции.

а) $f(x) = 4x - 6x^2 + \frac{13}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5$;

в) $f(x) = x\left(3x + \frac{21}{4}\right)(4x + 7)$;

б) $f(x) = \frac{x + 2x^2}{x - 4}$;

г) $f(x) = (x + 2)(x - 3)(x + 5)$.

П

12 Найдите точки максимума и минимума функции.

а) $f(x) = \frac{x}{x + 2} - \frac{x - 1}{x} + 1$;

в) $f(x) = (x + 1)^3(x - 1)^2(x + 3)^3$;

б) $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$;

г) $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{x + 2}{x^2}$.

13 Найдите интервалы, на которых функция возрастает.

а) $f(x) = x\left(x + \frac{1}{3}\right)(2x - 3)^2$;

в) $f(x) = \sqrt{x} - 10\sqrt{x + 1}$;

б) $f(x) = \frac{2 + 4x + x^2}{2 - 4x + x^2}$;

г) $f(x) = \sqrt{10x^2 - 2x + 4}$.

14 Найдите точки, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$

параллельна прямой $y = -\frac{9}{2}x + 12$.

а) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 1$;

в) $f(x) = \frac{9}{2}(\sqrt{x + 1} + \sqrt{1 - x})$;

б) $f(x) = \frac{2 + 4x + x^2}{2 + \frac{1}{4}x}$;

г) $f(x) = \frac{2x + 3}{2x + 2} - \frac{35x}{8}$.

15 Докажите, что функция $f(x) = (x-a)^n (x+a)^n$ имеет экстремумы в одних и тех же точках при всех натуральных $n \geq 2$.

16 При каких значениях параметра $a \neq 0$ кубическая парабола $y = ax^3 + x$ не имеет точек максимума и минимума?

17 Докажите, что $x + \frac{1}{x} \geq \frac{3}{2}$ при $x > 0$.

М

18 Найдите все значения параметра a , при которых функция

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^2 + 1} + \frac{1}{(x+a)^2 + 1} \text{ имеет минимум в точке } x = 0.$$

19 Докажите, что $(x^2 - 1)x^n \geq -2\sqrt{\frac{n^n}{(n+2)^{n+2}}}$ при натуральных значениях n и $x > 0$.

20 Докажите, что уравнение $x^{11} + x^6 + 1 = 0$ имеет один корень, причём в области $x < -\frac{23}{25}$.

21 Найдите точки максимума и минимума функции

$$f(x) = x^2(5x + \sin x - \cos x) + 2x(\sin x + \cos x) + 3(\cos x - \sin x - 5x).$$

5.3. Наибольшее и наименьшее значение функции на множестве

Нахождение наибольшего или наименьшего значения функции на данном множестве – часто возникающая на практике задача. Её общая постановка такова. Имеется функция $f(x)$, определённая во всех точках множества M . Требуется найти наибольшее и/или наименьшее значение функции $f(x)$ на множестве M .

Прежде всего, отметим, что в своей самой общей постановке задача может и не иметь решения. Например, если мы интересуемся наименьшим и наибольшим значением функции $y = x^2 - 2x + 2$ на интервале $(0; 3)$, то из графика этой функции

на интервале $(0; 3)$ видно, что она имеет на этом интервале наименьшее значение, равное 1, но не имеет наибольшего значения.

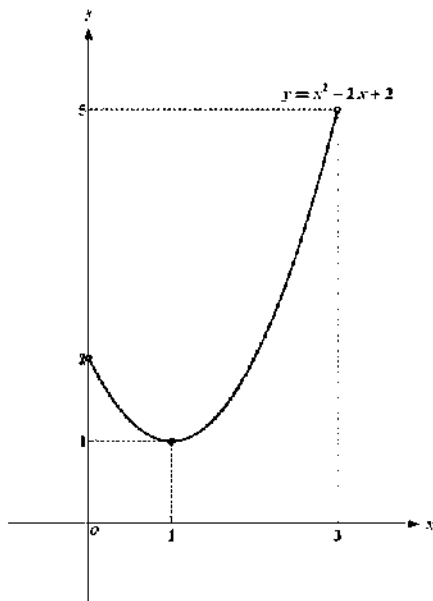


Рис. 5.20

Сначала мы изучим ситуацию, для которой вопрос о существовании наименьшего и наибольшего значений ясен.

В параграфе 4.5 была сформулирована вторая теорема Вейерштрасса:

Функция, непрерывная на отрезке, достигает на этом отрезке своего наименьшего и наибольшего значений.

Точнее, если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то найдутся такие точки $u \in [a; b]$ и $v \in [a; b]$, что, $f(x) \geq f(u)$ и $f(x) \leq f(v)$ при всех $x \in [a; b]$, и тогда на отрезке $[a; b]$ $f_{\text{наим.}} = f(u)$, $f_{\text{наиб.}} = f(v)$.

Таким образом, в случае, когда множество является отрезком, а функция определена и непрерывна во всех точках этого отрезка, решения задачи о наименьшем и наибольшем значении функции на множестве существуют. Осталось научиться их находить.

Для начала рассмотрим два совсем простых, по сути очевидных случая.

Если непрерывная функция $y = f(x)$ возрастает на отрезке $[a; b]$, то своё наименьшее значение она принимает на левом конце этого отрезка, а наибольшее – на правом: $y_{\text{наим.}} = f(a)$, $y_{\text{наиб.}} = f(b)$ (рис. 5.21 а).

Если непрерывная функция $y = f(x)$ убывает на отрезке $[a; b]$, то своё наименьшее значение она принимает на правом конце этого отрезка, а наибольшее – на левом: $y_{\text{наим.}} = f(b)$, $y_{\text{наиб.}} = f(a)$ (рис. 5.21 б).

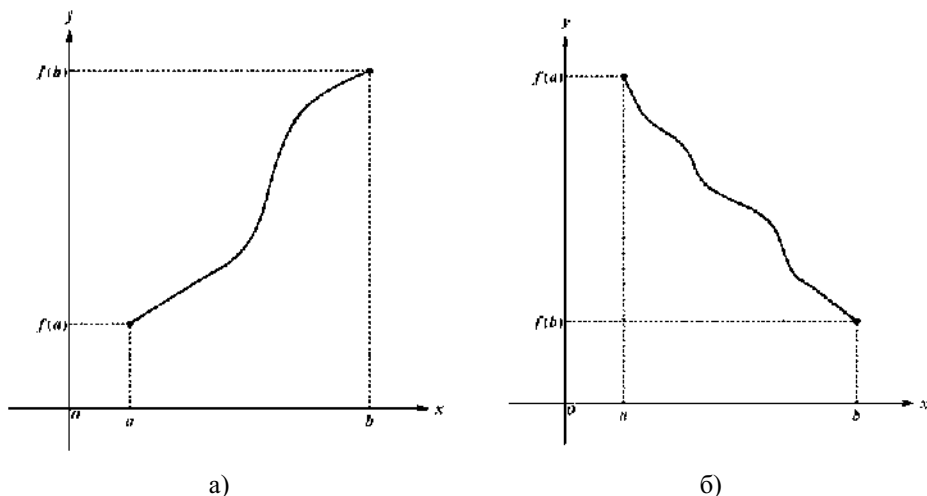


Рис. 5.21

Самой часто встречающейся в дальнейшем будет ситуация, когда нужно найти наибольшее или наименьшее значения непрерывной функции на отрезке $[a; b]$, причём эта функция имеет на отрезке $[a; b]$ конечное количество критических точек. Понятно, что в такой ситуации своё наименьшее и наибольшее значения функция принимает либо в одной из этих критических точек, либо на одном из концов отрезка.

Работа в такой ситуации может быть организована одним из двух способов, каждый из которых имеет свои достоинства и недостатки.

Начало работы в каждом из этих способов одинаковое:

1) Убеждаемся, что функция $f(x)$ действительно определена и непрерывна во всех точках отрезка $[a; b]$.

2) Находим производную функции $f'(x)$ (не забыв максимально её упростить и при возможности разложить на множители).

3) Находим критические точки функции $f(x)$ и отбираем те из них, которые принадлежат отрезку $[a; b]$.

Дальше работа идёт по-разному в каждом из способов.

Первый способ (иногда его образно называют «способ для ленивых»):

4а) Вычисляем значения функции в каждой из отобранных точек, а также на концах отрезка.

5а) Выбираем из вычисленных значений наименьшее и/или наибольшее.

Несомненным достоинством этого способа является его простота, а недостатком – большой объём вычислительной работы и (самое главное) возможные трудности, при сравнении чисел.

Второй способ:

4б) Изображаем отрезок, наносим на него отобранные критические точки.

5б) Выясняем знак производной на каждом из образовавшихся интервалов.

6б) Выясняем, в какой крайней точке каждого их интервалов, на который отрезок разбит критическими точками, функция достигает, скажем, наибольшего значения, и отмечаем эту точку. Затем вычисляем значения функции только в отмеченных точках и сравниваем их.

В некоторых задачах оба способа приводят примерно к одинаковому объёму работы, но есть задачи, где второй способ заметно быстрее.

Пример 4. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x - 2\sin x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{7}\right]$.

Решение. Заметив, что функция $f(x) = x - 2\sin x$ определена и непрерывна во всех точках отрезка $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{7}\right]$, вычислим её производную: $f'(x) = 1 - 2\cos x$.

Таких точек, где производная не существует, нет. Приравнявая производную к нулю, приходим к уравнению $\cos x = \frac{1}{2}$. Поскольку отрезок $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{7}\right]$ полностью расположен в первой четверти, единственное решение этого уравнения, принадлежащее этому отрезку, $x = \frac{\pi}{3}$.

Если дальнейшее решение проводить первым способом, то возникнет необходимость нахождения наименьшего из трёх чисел:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \sqrt{2}; \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} \quad \text{и} \quad f\left(\frac{3\pi}{7}\right) = \frac{3\pi}{7} - 2\sin \frac{3\pi}{7},$$

что является отдельной, причём очень трудной задачей.

Если же дальнейшее решение проводить вторым способом, то без труда рисуется схема (рис. 5.22):

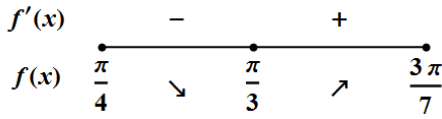


Рис. 5.22

Теперь ясно, что наша функция $f(x) = x - 2\sin x$ своё наименьшее значение на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$ принимает на его правом конце, т.е. в точке $\frac{\pi}{3}$, а своё наибольшее значение на отрезке $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{7}\right]$ – на его левом конце, т.е. тоже в точке $\frac{\pi}{3}$. Таким образом, своё наибольшее значение на всём отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{7}\right]$ она принимает в точке $\frac{\pi}{3}$, и поэтому $f_{\text{наим.}} = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}$.

В дальнейшем мы увидим, что похожие соображения иногда позволяют находить наибольшее или наименьшее значения непрерывной функции и на некоторых других множествах – не являющихся отрезками.

Очень интересными являются практические задачи на нахождение наибольших или наименьших значений, или, как их ещё называют, содержательные экстремальные задачи. Решение почти каждой из таких задач представляет собой маленькое исследование.

Прежде чем рассматривать конкретные примеры, отметим, что решение содержательной экстремальной задачи чётко разделяется на два этапа. Первый этап заключается в построении математической модели описанной в задаче ситуации и дальнейшем преобразовании этой модели к стандартному виду: в конечном итоге должна получиться задача нахождения наибольшего или наименьшего значения функции на некотором множестве. Второй этап, заключающийся в нахождении этого наибольшего или наименьшего значения, мы уже обсудили в начале параграфа.

Что касается первого этапа, то он тоже поддаётся формализации, разбиению на последовательность необходимых, обязательных шагов, которую нужно ясно представлять, но, вместе с тем, эта формализация носит лишь рекомендательный характер, т.е. можно с самого начала указать, в чём упомянутые шаги заключаются, что должно быть на каждом из шагов сделано, но как это должно быть сделано, надо придумывать в каждой конкретной задаче, исходя из её специфики. Вкратце

стандартная* последовательность шагов первого этапа решения содержательной экстремальной задачи следующая:

1) Выяснить, какая величина должна принимать экстремальное значение; это и будет исследуемая нами функция.

2) Выразить эту функцию через данные задачи, а также через величины, отсутствующие в условии (т.е. переменные), введя их в нужном количестве.

3) Если окажется, что исследуемая функция зависит от нескольких переменных (а чаще всего, за исключением совсем простеньких задач, так и бывает), то нужно, обнаружив связи между этими переменными, выразить их через одну единственную переменную, т.к. изучаемые в средней школе методы позволяют исследовать на экстремум только функции одной переменной.

4) Найти множество изменения той единственной переменной, через которую оказалась выраженной исследуемая функция; для этого нужно выявить и выписать ограничения на переменные (причём на все переменные, а не только на ту единственную, к которой всё свелось в итоге!) и решить полученную систему.

В результате реализации программы, описанной шагами 1–4, задача сведётся к нахождению экстремального значения функции одной переменной на известном множестве, т.е. завершится первый этап решения и начнётся второй.

Пример 4. Требуется изготовить из жести открытый бак объёмом 32 м^3 , имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. При каких размерах бака на его изготовление потребуется наименьшее количество жести?

Решение. Пусть основание бака – квадрат со стороной x м, а его высота равна y м. Тогда площадь основания бака равна $x^2 \text{ м}^2$, а площадь каждой из четырёх боковых граней равна по $xу \text{ м}^2$. Таким образом, на изготовление бака потребуется $(x^2 + 4xy) \text{ м}^2$ жести. Это и есть та самая величина, наименьшее значение которой мы

должны найти: $S = x^2 + 4xy$. Оказалось, что исследуемая функция зависит от двух переменных: x и y . Значит, нужно установить связь между этими переменными. Вспоминая, что объём бака составляет 32 м^3 , приходим к равенству $x^2 y = 32$.

Выражая из этого равенства y через x по формуле $y = \frac{32}{x^2}$ и подставляя в выражение

для площади требуемой жести, получим: $S = x^2 + 4xy = x^2 + 4x \cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}$.

Мы выразили интересующую нас величину S как функцию одной переменной x :

$$S(x) = x^2 + \frac{128}{x}.$$

Чтобы получить ограничения на переменную x , выпишем ограничения на все переменные, участвовавшие в решении, т.е. и на x , и на y – ведь поскольку мы выражали y через x , ограничения на y могут привести к новым ограничениям на x .

* В некоторых случаях разумно отойти от описываемой последовательности шагов.

В данном примере ограничения очень простые: $x > 0$; $y > 0$. Поскольку y выражается через x по формуле $y = \frac{32}{x^2}$, учёт ограничений на y в данном примере не приводит к появлению дополнительных ограничений на x , кроме уже имеющегося $x > 0$, или, по-другому, $x \in (0; +\infty)$.

На этом первый этап решения завершён, и мы формулируем задачу для второго этапа: Найти наименьшее значение функции $S(x) = x^2 + \frac{128}{x}$ на множестве $(0; +\infty)$.

Находим производную:

$$S'(x) = \left(x^2 + \frac{128}{x}\right)' = 2x - 128 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2x^3 - 128}{x^2} = \frac{2(x^3 - 64)}{x^2}.$$

Производная не существует в точке 0, которая не принадлежит нашему множеству $(0; +\infty)$. Приравняв производную к нулю, получаем уравнение:

$$\frac{2(x^3 - 64)}{x^2} = 0, \text{ имеющее единственное решение } x = 4. \text{ Это критическая точка}$$

функции $S(x) = x^2 + \frac{128}{x}$, принадлежащая множеству $(0; +\infty)$.

Рисуем стандартную схему:

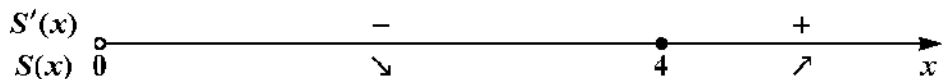


Рис. 5.23

Теперь ясно, что поскольку функция $S(x)$ убывает на интервале $(0; 4]$, своё наименьшее значение на этом интервале она принимает на его правом конце, т.е. в точке 4. Поскольку функция $S(x)$ возрастает на интервале $[4; +\infty)$, своё наименьшее значение на этом интервале она принимает на его левом конце, т.е. в точке 4. Таким образом, своё наименьшее значение на всём интервале $(0; +\infty)$ функция $S(x)$ принимает в точке 4, и поэтому $S_{\text{наим.}} = S(4) = 48$.

Таким образом, мы установили, что наименьшее количество жести, необходимое для изготовления нужного бака, составляет 48 м^2 . В задаче это не требуется, но можно найти высоту такого бака: $y = \frac{32}{4^2} = 2$. Таким образом, основанием такого бака является квадрат со стороной 4 м, а высота бака равна 2 м.
 Ответ: 48 м^2 .

Н

1 а) В каком случае минимальное или максимальное значение функции на отрезке может достигаться на его концах?

б) Может ли непрерывная функция не иметь ни максимального, ни минимального значения на отрезке? интервале?

2 а) Начертите схематический график непрерывной функции, которая достигает своего максимального и минимального значения на границе отрезка.

б) Начертите схематический график непрерывной функции, которая достигает своего максимального значения внутри отрезка, а минимального значения на границе отрезка.

в) Начертите схематический график непрерывной функции, которая достигает своего максимального значения на границе отрезка, а минимального значения внутри отрезка.

3 Из каких шагов складывается поиск минимального и максимального значения непрерывной функции на отрезке? интервале?

4 При каком $x \in [1, 5; 3]$ расстояние от параболы $y = x^2 - 4x + 7$ до прямой $y = 2$ минимально.

5 Постройте график функции $y = |2x + |x - 2||$ на отрезке $x \in [-3; 4]$ и отметьте на нём точки, в которых функция y принимает свое наибольшее и наименьшее значение на нём.

6 Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[-10; 10]$.

а) $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{5}$;

в) $f(x) = \sqrt{2}x + 2\sqrt{3}$;

б) $f(x) = -5x + 7$;

г) $f(x) = -\frac{9}{2}x + \frac{1}{4}$.

7 а) Докажите, что если у прямой $y = kx + b$ угловой коэффициент положителен, то y достигает своего наибольшего значения на правом конце отрезка $[A; B]$.

б) Докажите, что если у прямой $y = kx + b$ угловой коэффициент отрицателен, то y достигает своего наибольшего значения на левом конце отрезка $[A; B]$.

8 Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[-2; 2]$.

а) $f(x) = x^2 - 2x + 3$;

в) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$;

б) $f(x) = -x^2 + 3x - 1$;

г) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 3x + 2$.

9 Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на интервале $[-0,5; 3)$.

а) $f(x) = x + \frac{2}{x+1}$;

в) $f(x) = 2x - \frac{3}{4-x}$;

б) $f(x) = -x - \frac{4}{4x+3}$;

г) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{x+3}$.

10 Докажите, что неравенство $2\sqrt{6} \leq 2x + \frac{3}{x} \leq 7$ справедливо, если выполнено неравенство $1 \leq x \leq 3$.

11 Известно, что сумма двух положительных чисел равна 50. Какими должны быть эти числа, чтобы их произведение было максимальным?

12 Известно, что произведение двух положительных чисел равно 20. Какими должны быть эти числа, чтобы их сумма была минимальна?

П

13 Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на интервале $[0; 5)$.

а) $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - 2x^2 + 4x$;

в) $f(x) = (1-x)\left(x - \frac{5}{2}\right)(x-4)$;

б) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-5)$;

г) $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - x^2 + \frac{5}{2}$.

14 Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

а) $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

в) $f(x) = \cos x + \sin x$;

б) $f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$;

г) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$.

15 В зависимости от параметров a, b, c установите максимальное и минимальное значение функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ на отрезке $x \in [-1; 1]$.

16 Найдите максимальное значение функции $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}\cos 2x$ на отрезке

$$x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{6}\right].$$

17 Найдите максимальное и минимальное значение функции $f(x) = x^3 + 6x + \frac{3}{x}$ на

$$\text{отрезке } x \in \left[\frac{1}{7}; 2\right].$$

18 Найдите максимальное и минимальное значение функции $f(x) = x - \frac{x}{x+2}$ на интервале $x \in [-1; 1)$.

М

19 Окно имеет форму прямоугольника, завершённого сверху полукругом. Известно, что периметр окна равен 15 м. При каком радиусе полукруга окно будет пропускать наибольшее количество света?

20 Докажите, что точкой, сумма расстояний от которой до двух данных различных точек на плоскости минимальна, является любая точка отрезка, соединяющего эти две точки.

21 Найдите максимальное и минимальное значение корня уравнения

$$\sqrt{\frac{x}{2x+1}} = a - a^2 \text{ при } a \in [0; 1].$$

5.4. Построение графиков функций

Построению графика функции предшествует работа по её исследованию, которая предполагает следующие этапы:

- 1) Найти область определения функции.
- 2) Установить, имеет ли функция особенности поведения (является ли чётной, нечётной, периодической).
- 3) Найти нули функции и интервалы её знакопостоянства.
- 4) Найти интервалы монотонности.
- 5) Найти точки экстремумов и соответственные экстремумы.
- 6) Выяснить поведение функции при приближении аргумента к границам области определения.

Все пункты, кроме последнего, вы уже умеете выполнять. Обсудим последний пункт, а затем рассмотрим несколько примеров построения графиков.

Сначала заметим, что мы будем иметь дело с функциями, область определения которых есть объединение нескольких интервалов. Границы этих интервалов и являются границами области определения функции. Это могут быть граничные точки или бесконечности.

Предположим, к примеру, что область определения некоторой функции $f(x)$ является интервалом $(2; +\infty)$. Здесь границами области определения является $+\infty$ и точка 2. Под словами «Выяснить поведение функции при приближении аргумента к границам области определения» понимается нахождение соответствующего предела. При названной области определения нужно найти пределы $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ и $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x)$

(если они существуют).

Или, для функции $g(x)$ с областью определения $[2; 3) \cup (3; 7)$ границами области определения являются точки 2; 3 и 7, а значит, при исследовании этой функции придётся искать пределы $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} g(x)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} g(x)$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x > 3}} g(x)$ и $\lim_{\substack{x \rightarrow 7 \\ x < 7}} g(x)$.

Мы уже встречались с ситуацией, когда пределы указанных типов являются некоторыми числами. Но при исследовании функций довольно часто возникают пределы другого вида, которые называются *бесконечными пределами*. Мы сначала рассмотрим бесконечный предел в точке (при стремлении аргумента к этой точке слева или справа), а затем и на бесконечности.

Пусть функция $f(x)$ определена во всех точках интервала $(a; m)$. Мы говорим, что левосторонний предел функции $f(x)$ в точке m (говорят ещё «при x , стремящемся к m слева») равен $+\infty$, если для любого действительного числа l можно указать такую левую полукрестность точки m , что при всех x , принадлежащих этой левой полукрестности, выполняется неравенство $f(x) > l$.

Этот факт записывается следующим образом: $\lim_{\substack{x \rightarrow m \\ x < m}} f(x) = +\infty$. Он значит, что при неограниченном приближении аргумента x к точке m слева соответствующие значения функции неограниченно увеличиваются (говорят также «становятся больше любого наперёд заданного числа»). На графике это выглядит примерно так, как изображено на рис. 5.24 а. Говорят, что прямая $x = m$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при x , стремящемся к m слева.

Аналогично, для функции $f(x)$, определённой во всех точках интервала $(a; m)$, мы говорим, что её левосторонний предел в точке m (или при x , стремящемся к m слева) равен $-\infty$, если для любого действительного числа l можно указать такую левую полукрестность точки m , что при всех x , принадлежащих этой левой полукрестности, выполняется неравенство $f(x) < l$.

Этот факт записывается в виде: $\lim_{\substack{x \rightarrow m \\ x < m}} f(x) = -\infty$ и значит, что при неограниченном

приближении аргумента x к точке m слева соответствующие значения функции неограниченно уменьшаются (говорят также «становятся меньше любого наперёд заданного числа»). На графике это выглядит примерно так, как изображено на рис. 5.24 б. В этом случае также говорят, что прямая $x = m$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при x , стремящемся к m слева.

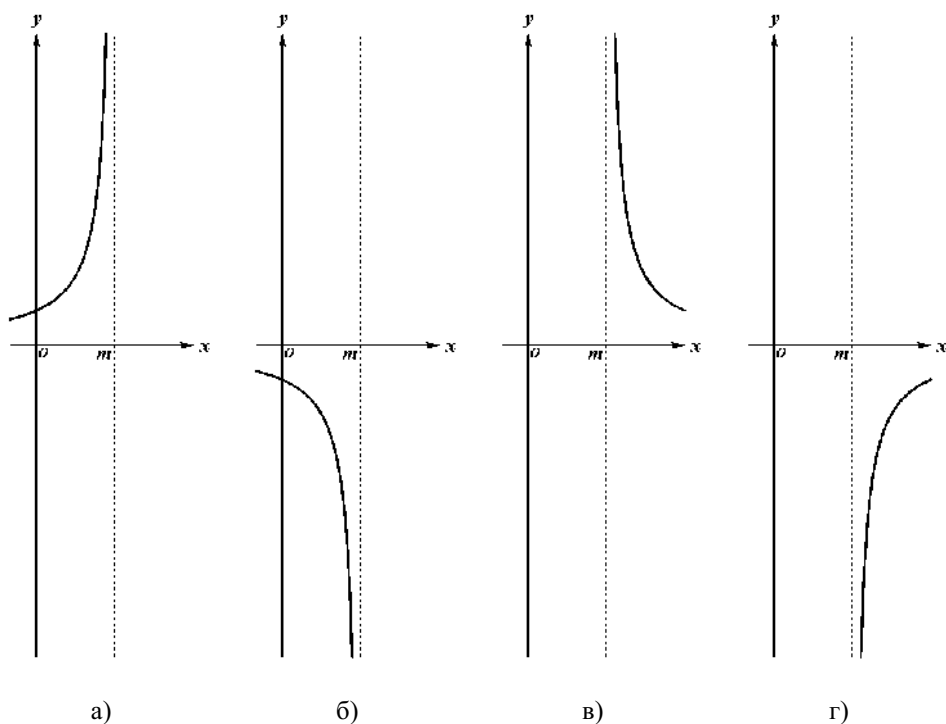


Рис. 5.24

Аналогично даются определения бесконечных правосторонних пределов в точке m для функции $f(x)$, определённой во всех точках интервала $(m; b)$.

Если для любого действительного числа l можно указать такую правую полуокрестность точки m , что при всех x , принадлежащих этой правой полуокрестности, выполняется неравенство $f(x) > l$, то $\lim_{\substack{x \rightarrow m \\ x > m}} f(x) = +\infty$ (рис. 5.24 в).

Если для любого действительного числа l можно указать такую правую полуокрестность точки m , что при всех x , принадлежащих этой правой полуокрестности, выполняется неравенство $f(x) < l$, то $\lim_{\substack{x \rightarrow m \\ x > m}} f(x) = -\infty$ (рис. 5.24 г).

Теперь рассмотрим бесконечные пределы на бесконечности. Здесь тоже имеется четыре возможности:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Рассмотрим сначала случай $x \rightarrow +\infty$.

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(m; +\infty)$, где m – некоторое действительное число. Мы говорим, что предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ равен $+\infty$ и пишем $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, если для любого действительного числа l можно указать такое действительное число p , что при всех $x > p$ выполняется неравенство $f(x) > l$. Попросту говоря, это значит, что при неограниченном увеличении значений аргумента соответствующие значения функции неограниченно увеличиваются.

Аналогично, для функции $f(x)$, определённой на интервале $(m; +\infty)$, где m – некоторое действительное число, мы говорим, что её предел при $x \rightarrow +\infty$ равен $-\infty$ и пишем $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, если для любого действительного числа l можно указать такое действительное число p , что при всех $x > p$ выполняется неравенство $f(x) < l$. Это значит, что при неограниченном увеличении значений аргумента соответствующие значения функции неограниченно уменьшаются.

Наконец, рассмотрим случай $x \rightarrow -\infty$.

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(-\infty; m)$, где m – некоторое действительное число. Мы говорим, что предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$ равен $+\infty$ и пишем $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, если для любого действительного числа l можно указать такое действительное число p , что при всех $x < p$ выполняется неравенство $f(x) > l$. Это имеет следующий смысл: при неограниченном уменьшении значений аргумента соответствующие значения функции неограниченно увеличиваются.

Аналогично, для функции $f(x)$, определённой на интервале $(-\infty; m)$, где m – некоторое действительное число, мы говорим, что её предел при $x \rightarrow -\infty$ равен $-\infty$ и пишем $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, если для любого действительного числа l можно указать такое действительное число p , что при всех $x < p$ выполняется неравенство $f(x) < l$. Это значит, что при неограниченном уменьшении значений аргумента соответствующие значения функции неограниченно уменьшаются.

Сформулируем несколько важных теорем, связанных с бесконечными пределами. Напомним, что многочлен от одной переменной называется *приведённым*, если коэффициент его старшего одночлена (т.е. одночлена, имеющего наибольшую степень) равен 1.

I. Если $P_n(x)$ – приведённый многочлен степени n , где $n \geq 1$, то

а) при чётном n $\lim_{x \rightarrow -\infty} P_n(x) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = +\infty$;

а) при нечётном n $\lim_{x \rightarrow -\infty} P_n(x) = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = +\infty$.

II. Если предел функции $f(x)$ в точке или на бесконечности равен бесконечности (неважно, $+\infty$ или $-\infty$), а соответствующий предел функции $g(x)$ равен действительному числу A , то соответствующий предел функции $f(x) \pm g(x)$ равен бесконечности – такой же, как предел функции $f(x)$.

III. Если предел функции $f(x)$ в точке или на бесконечности равен бесконечности (неважно, $+\infty$ или $-\infty$), а соответствующий предел функции $g(x)$ равен положительному действительному числу A , то соответствующий предел функции $f(x)g(x)$ равен бесконечности – такой же, как предел функции $f(x)$.

IV. Если предел функции $f(x)$ в точке или на бесконечности равен $+\infty$, то соответствующий предел функции $-f(x)$ равен $-\infty$, и наоборот, если предел функции $f(x)$ в точке или на бесконечности равен $-\infty$, то соответствующий предел функции $-f(x)$ равен $+\infty$.

V. Если дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ такова, что предел её знаменателя, функции $g(x)$, в точке или на бесконечности равен бесконечности (неважно, $+\infty$ или $-\infty$), а предел её числителя, функции $f(x)$, равен любому действительному числу, отличному от нуля, то соответствующий предел функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ равен нулю.

VI. Если дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ такова, что предел её знаменателя, функции $g(x)$, в точке или на бесконечности равен нулю, а предел её числителя, функции $f(x)$, равен любому действительному числу, отличному от нуля, то соответствующий предел функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ равен бесконечности (вопрос о том, $+\infty$ или $-\infty$, требует дополнительного исследования).

Пример 1. Найдите предел $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - 6x + 2x^4 - 3x^5)$.

Решение. После вынесения множителя -3 за скобки многочлен в скобках станет приведённым, и можно применить теоремы Ib, III и IV:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - 6x + 2x^4 - 3x^5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{3} + 2x - \frac{2}{3}x^4 + x^5 \right) \cdot (-3) = +\infty$$

Пример 2. Найдите предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 5x^3 + 7}{x^3 + x + 5}$.

Решение. Предел частного двух многочленов на бесконечности удобно находить, разделив предварительно числитель и знаменатель на старшую степень всех имеющихся одночленов (в нашем примере это x^4):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 5x^3 + 7}{x^3 + x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^4}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^4}}$$

По теореме V все пределы $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3}$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4}$ равны нулю, значит, предел числителя равен 2, а предел знаменателя равен 0. По теореме VI искомый предел дроби равен бесконечности. А поскольку при больших значениях x и числитель, и знаменатель положительны, то это $+\infty$. Итак, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 5x^3 + 7}{x^3 + x + 5} = +\infty$.

Вычислив таким же образом несколько конкретных пределов, можно сформулировать следующую теорему:

VII. Предел частного двух многочленов на бесконечности равен:

- а) нулю, если степень числителя меньше степени знаменателя;
- б) бесконечности, если степень числителя больше степени знаменателя;
- в) отношению старших коэффициентов числителя и знаменателя, если их степени равны.

В данном параграфе мы познакомились с вертикальными асимптотами. Они могут возникать в граничных точках области определения функции, если хотя бы один односторонний предел в такой точке бесконечный.

В параграфе 4.3 мы познакомились с горизонтальными асимптотами. Они могут возникать при $x \rightarrow -\infty$ или при $x \rightarrow +\infty$, если соответствующий предел равен какому-нибудь действительному числу.

Оказывается, при $x \rightarrow -\infty$ или при $x \rightarrow +\infty$ график может иметь также *наклонные асимптоты*.

Прямая $y = kx + b$, где $k \neq 0$, называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$.

Можно доказать, что график функции $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту при $x \rightarrow +\infty$ в том и только в том случае, когда существуют пределы:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = 0$$

Аналогично определяется наклонная асимптота при $x \rightarrow -\infty$. Так же аналогично, прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$ в том и только в том случае, когда $k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = 0$ (если оба эти предела существуют).

Заметим, что по этим же формулам можно находить и горизонтальные асимптоты. Они будут возникать, если предел для вычисления k окажется равным нулю.

Пример 3. Установите, что у графика функции $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1}$ имеется наклонная асимптота при $x \rightarrow +\infty$ и запишите её уравнение.

Решение. Напомним, что прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ в том и только в том случае, когда существуют пределы:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = 0.$$

Попробуем вычислить первый из них:

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{(x - 1)x} = 2, \text{ поскольку мы имеем предел на бесконечности}$$

частного двух многочленов одинаковой (второй) степени со старшим коэффициентом 2 в числителе и 1 в знаменателе.

Теперь займёмся вторым пределом (при найденном значении $k = 2$):

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + x - 1 - 2x^2 + 2x}{x - 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x - 1}{x - 1} \right) = 3, \text{ поскольку мы имеем предел на бесконечности частного двух} \end{aligned}$$

многочленов одинаковой (первой) степени со старшим коэффициентом 3 в числителе и 1 в знаменателе.

Таким образом, одновременно установлено существование наклонной асимптоты при $x \rightarrow +\infty$, и найдено её уравнение: $y = 2x + 3$.

Ответ: $y = 2x + 3$.

Замечание: Внимательный анализ вычисления пределов показывает, что мы нигде не пользовались тем обстоятельством, что аргумент x стремится именно к $+\infty$;

при $x \rightarrow -\infty$ пределы будут такими же. Таким образом, можно утверждать, что та же самая прямая $y = 2x + 3$ является наклонной асимптотой графика функции

$$y = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} \text{ и при } x \rightarrow -\infty.$$

Пример 4. Исследуйте функцию $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1}$ и постройте её график.

Решение. Функция определена при всех значениях аргумента, для которых $x - 1 \neq 0$. Область определения функции, таким образом: $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Функция не может быть чётной или нечётной, поскольку её область определения не симметрична относительно нуля. Функция не может быть также периодической – если бы она имела период T , то в её область определения не могли бы входить числа вида $1 + nT$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Для нахождения нулей функции решим уравнение $\frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} = 0$, или

$2x^2 + x - 1 = 0$. Его корни $x = -1$ и $x = \frac{1}{2}$. Применим метод интервалов. Нанесём эти корни на область определения функции, и с помощью пробных точек определим знаки функции на каждом из образовавшихся интервалов (рис. 5.25).

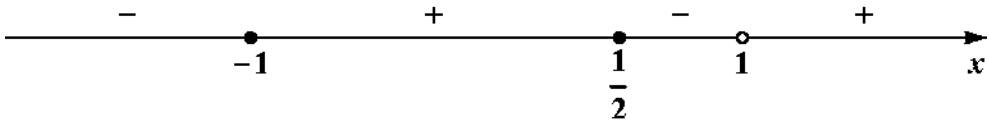


Рис. 5.25

Для дальнейшего исследования функции найдём её производную:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} \right)' = \frac{(2x^2 + x - 1)'(x - 1) - (2x^2 + x - 1)(x - 1)'}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{(4x + 1)(x - 1) - (2x^2 + x - 1)}{(x - 1)^2} = \frac{4x^2 - 4x + x - 1 - 2x^2 - x + 1}{(x - 1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(x - 1)^2} = \frac{2x(x - 2)}{(x - 1)^2}. \end{aligned}$$

Производная не существует в точке 1, но эта точка не является критической, т.к. не входит в область определения функции.

Производная равна нулю при $x = 0$ и $x = 2$. Обе эти точки – внутренние точки области определения, следовательно, они являются критическими.

Изображаем область определения $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, и наносим на неё критические точки 0 и 2 (закрашенными) (рис. 5.26). С помощью пробных точек определяем знак производной на каждом из образовавшихся интервалов. Вся эта информация приведена на рис. 5.26.

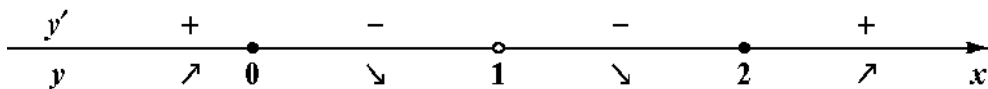


Рис. 5.26

При переходе через критическую точку 0 производная меняет знак с «+» на «-», значит, это точка максимума: $x_{\max} = 0$. Находим также максимум – значение функции в точке максимума $y_{\max} = y(0) = 1$.

При переходе через критическую точку 2 производная меняет знак с «-» на «+», значит, это точка минимума: $x_{\min} = 2$. Находим также минимум – значение функции в точке минимума $y_{\min} = y(2) = 9$.

Наклонную асимптоту нашего графика мы нашли в предыдущем примере, Ею является прямая $y = 2x + 3$ и при $x \rightarrow -\infty$, и при $x \rightarrow +\infty$.

Поскольку у области определения функции $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ граничная точка 1, нужно вычислить в этой точке оба односторонних предела функции, после чего будет ясно, является ли прямая $x = 2$ вертикальной асимптотой.

При $x \rightarrow 1$ и слева, и справа предел числителя дроби $\frac{2x^2 + x - 1}{x - 1}$ равен 2, а предел знаменателя равен 0.

Поскольку при $x \rightarrow 1$ слева $\frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} < 0$, то $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} = -\infty$.

Поскольку при $x \rightarrow 1$ справа $\frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} > 0$, то $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1} = +\infty$.

Итак, мы установили, что график имеет вертикальную асимптоту $x = 2$ и к тому же выяснили, как именно он к ней стремится.

Теперь, используя всю полученную информацию, строим график функции $y = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1}$ (рис. 5.27).

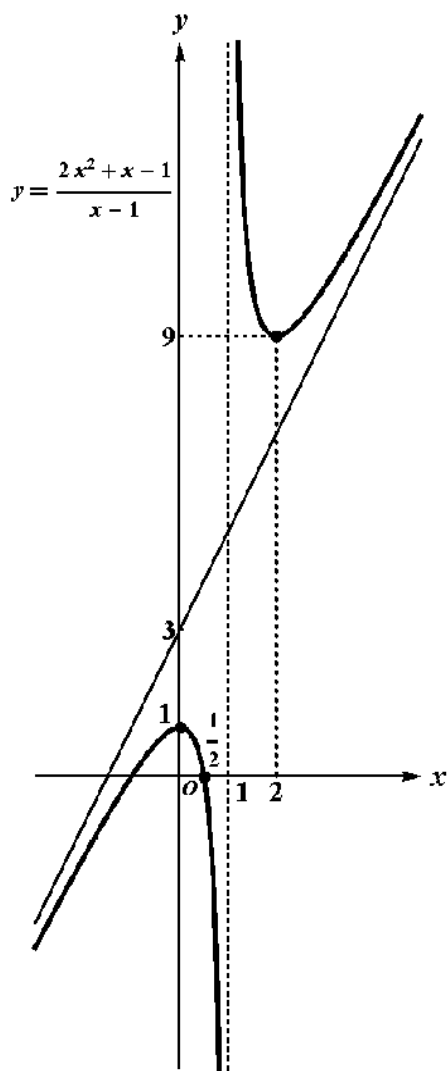


Рис. 5.27

С помощью построенного графика можно найти область значений функции:
 $E(y) = (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$.

Н

1 а) Что значит запись:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow m \\ x < m}} f(x) = +\infty ? \quad \lim_{\substack{x \rightarrow m \\ x < m}} f(x) = -\infty ? \quad \lim_{\substack{x \rightarrow m \\ x > m}} f(x) = +\infty ? \quad \lim_{\substack{x \rightarrow m \\ x > m}} f(x) = -\infty ?$$

б) Что значит запись:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ? \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty ? \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty ? \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty ?$$

в) Изобразите схематически график функции, для которой одновременно выполнено:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

г) Изобразите схематически график функции, для которой одновременно выполнено:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x < -4}} f(x) = +\infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x > -4}} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

д) Дайте определение каждого из бесконечных пределов, рассмотренных в пунктах а) и б).

2 а) Какие условия для функции $f(x)$ должны выполняться, чтобы у её графика существовала вертикальная асимптота в точке $x = a$?

б) Изобразите схематически график функции, область определения которой была бы $x \in (-2; 2) \cup (3; 10)$ и у которой были бы вертикальные асимптоты $x = -2$ и $x = 3$.

3 а) В каком случае существует горизонтальная асимптота у графика функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$? $x \rightarrow -\infty$?

б) Изобразите схематически график функции, имеющий горизонтальную асимптоту $y = 2$ при $x \rightarrow -\infty$ и $y = -5$ при $x \rightarrow +\infty$.

4 а) Что такое наклонная асимптота графика функции?

б) Как находятся коэффициенты уравнения прямой, являющейся наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$? $x \rightarrow -\infty$?

в) Изобразите схематически график функции, имеющий наклонную асимптоту $y = 2x + 1$ при $x \rightarrow +\infty$ и $y = -x - 2$ при $x \rightarrow -\infty$.

5 Изобразите схематически график функции, область определения которой имеет вид $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 4) \cup (4; +\infty)$, если про неё известно, что $f(-3) = 1$, $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} f(x) = +\infty$,

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x < 4}} f(x) = +\infty$, $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} f(x) = -\infty$, а также, что он имеет

асимптоту $y = -1$ при $x \rightarrow -\infty$ и $y = \frac{x}{2}$ при $x \rightarrow +\infty$.

6 Вычислите предел.

а) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 5x^3 - 19x^2 - 65x + 150)$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + 4x^3 + 21x^2 - 100x + 100)$;

б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 5x^2 - 9x + 45)$; г) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 11x^2 - 35x + 25)$.

7 Вычислите предел.

а) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5(x-2)}{x-5} + \frac{2(x-2)}{x-3} \right)$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-5}{x} - \frac{3(x-4)}{x+4} \right)$;

б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2(x-2)}{x-3} - 4 \right)$; г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 - \frac{4(x-1)}{x+2} \right)$.

8 Вычислите предел.

а) $\lim_{\substack{x \rightarrow -4 \\ x < -4}} \frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 + x - 12}$; в) $\lim_{\substack{x \rightarrow -5 \\ x < -5}} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 6x + 5}$;

б) $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{x^2 - x - 20}{x^2 - x - 2}$; г) $\lim_{\substack{x \rightarrow 5 \\ x > 5}} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 25}$.

9 Вычислите предел.

а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3x + 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - 15}{x^2 + x}$;

б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5x}{x^2 + 6x + 5}$; г) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 7x + 10}$.

10 Вычислите предел.

а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 7x^2 + 12x}{x^2 - x - 20}$; в) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 10x^2 + 33x + 36}{x^2 - 4x - 5}$;

б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}$; г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^3 + x^2 - 16x - 16}$.

11 Вычислите предел.

а) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-5)(x-3)+(x-3)(2+x)}{(x-4)(5+x)+(x-2)(5+x)};$

в) $\lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} \frac{(x-1)(x+4)+(x-5)(x+5)}{(x-5)(x-4)+(x-2)(x-4)};$

б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-5)^2 + (x-3)(x-2)}{x(x-2) + (x-5)(x+2)};$

г) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{(x-2)(x+4)+x(x+5)}{(x-4)(x-2)+x(x-2)}.$

12 Вычислите предел.

а) $\lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ x < 3}} \frac{(x-5)(x-4)(x-1)^2}{(x-3)(x-2)(x+1)^2};$

в) $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{(x-4)(x+1)^2(x+3)}{(x-2)(x-1)^2(x+2)};$

б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x+2)^2(x+5)}{(x+1)^2(x+2)(x+3)};$

г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)(x+2)(x+3)(x+5)}{(x-5)(x-3)^2(x+1)}.$

II

13 Сколько асимптот может иметь график функции

- а) вертикальных; б) горизонтальных; г) наклонных?

14 Найдите вертикальные асимптоты графика функции $f(x)$ (если они имеются).

а) $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{6x^2 - x - 1};$

в) $f(x) = \frac{5 + 6x + x^2}{x^2 + 4x - 5};$

б) $f(x) = \frac{2x^2 - 15 - x}{x^2 - 3 + 2x};$

г) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{4x^2 + 11x + 6}.$

15 Найдите горизонтальные асимптоты графика функции $f(x)$ (если они имеются).

а) $f(x) = \frac{-2x^2 - 2x - 1}{-6x^3 - 8x^2 - 9x + 10};$

в) $f(x) = \frac{-8x^3 - 8x^2 + 6x + 6}{-10x^3 + 3x^2 + 5x - 10};$

б) $f(x) = \frac{-10x^3 - 10x^2 + 2x - 2}{-7x^3 + 3x^2 + 2x - 1};$

г) $f(x) = \frac{6x^3 + 4x^2 - 3x + 2}{7x^2 + 7x - 1}.$

16 Найдите наклонные асимптоты графика функции $f(x)$.

а) $f(x) = \frac{9x^4 + 6x^3 - 6x^2 - 8x + 7}{x^3 - 5x^2 - 4x - 1};$

в) $f(x) = \frac{3x^4 - x^3 - 10x^2 - 9x + 6}{-4x^3 - 3x^2 - 5x + 8};$

б) $f(x) = \frac{2x^4 - 5x^3 + 8x^2 + 4x + 9}{7x^3 - x^2 - 7x - 8};$

г) $f(x) = \frac{x^4 + 5x^3 - 4x - 9}{6x^3 - 7x + 5}.$

17 Найдите вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты графика функции $f(x)$ (если они имеются).

а) $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^2 - 3x}$;

в) $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2}$;

б) $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 - 3x - 18}{x^2 - x}$;

г) $f(x) = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 + 6x + 9}$.

18 Исследуйте функцию $f(x)$ и постройте эскиз её графика.

а) $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 2}$;

в) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x + 1}$;

б) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x}$;

г) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x - 2}$.

19 Докажите, что график дробно-рациональной функции (т.е. частного двух многочленов):

а) имеет горизонтальную асимптоту в том и только том случае, когда степени числителя и знаменателя равны;

б) имеет наклонную асимптоту в том и только том случае, когда степень числителя на единицу больше степени знаменателя.

20 Исследуйте функцию $f(x) = x + \frac{1}{x}$ и постройте эскиз её графика.

М

21 Докажите, используя определение предела, что предел многочлена $P_n(x)$

а) при $x \rightarrow +\infty$ равен $+\infty$, если коэффициент a_n при x^n положителен;

б) при $x \rightarrow +\infty$ равен $-\infty$, если коэффициент a_n при x^n отрицателен;

в) при $x \rightarrow -\infty$ равен $-\infty$, если коэффициент a_n при x^n отрицателен и степень многочлена чётная или если коэффициент положителен, а степень многочлена нечётная;

г) при $x \rightarrow -\infty$ равен $+\infty$, если коэффициент a_n при x^n положителен и степень многочлена чётная или если коэффициент отрицателен, а степень многочлена нечётная.

22 Докажите, что если $P_n(x)$ и $P_m(x)$ – многочлены степеней n и m , соответственно, а коэффициенты при их старших степенях равны $a > 0$ и $b > 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \begin{cases} 0, & m > n \\ +\infty, & n > m, \\ \frac{a}{b}, & n = m. \end{cases}$$

23 а) Верно ли, что если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$? $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = +\infty$?

б) Верно ли, что если $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, то $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + g(x)) = -\infty$? $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)g(x) = +\infty$?

в) Верно ли, что если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2f(x) + g(x)) = 0$? $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$? $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = -\infty$? $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = -\infty$?

г) Верно ли, что если $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ и $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} g(x) = +\infty$, то $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} (f(x) + 3g(x)) = +\infty$? $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)g(x) = +\infty$?

д) Верно ли, что если $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty$ и $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} g(x) = -\infty$, то $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} (f(x) + g(x)) = +\infty$? $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} (f(x) - g(x)) = +\infty$? $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} (f(x) + g(x)) = 0$? $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)g(x) = -\infty$?

24 Исследуйте функцию $f(x)$ и постройте эскиз её графика.

а) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 6x + 8};$

в) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 7x + 12};$

б) $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 + 5x + 6};$

г) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + 3x}.$

5.5*. Вторая производная и её применение

Если рассмотреть функцию $f(x)$ и вычислить её производную $f'(x)$, то может оказаться, что у этой производной тоже есть производная. Производная от производной функции называется *второй производной* (или *производной второго порядка*) и обозначается $f''(x)$.

Таким образом, по определению $f''(x) = (f'(x))'$.

Рассмотрим несколько примеров.

1) Если $f(x) = x^2$, то $f'(x) = (x^2)' = 2x$, $f''(x) = (2x)' = 2$.

2) Если $f(x) = \sin x$, то $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$, $f''(x) = (\cos x)' = -\sin x$.

3) Если $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$, то

$$f'(x) = \left(\frac{2x-3}{x+1} \right)' = \frac{(2x-3)'(x+1) - (2x-3)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1) - (2x-3)}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2},$$

$$f''(x) = \left(\frac{5}{(x+1)^2} \right)' = \frac{5' \cdot (x+1)^2 - 5 \cdot ((x+1)^2)'}{(x+1)^4} = \frac{-5 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = -\frac{10}{(x+1)^3}.$$

Заметим, кстати, хотя мы не будем этим специально заниматься, что точно так же можно определить и третью производную (производную третьего порядка) как производную от второй производной, и четвёртую производную (производную четвёртого порядка) как производную от третьей производной, и т.д. «Просто производная» в этом ряду называется иногда *производной первого порядка*, а производные, начиная со второго порядка – *производными высших порядков*.

Обсудим механический смысл второй производной. В параграфе 5.1 было установлено, что если точка движется по прямой, скажем, по оси Ox , и её координата x является функцией времени t , т.е. $x = x(t)$, то мгновенная скорость $v(t_0)$ точки в момент времени t_0 равна производной функции $x(t)$ в точке t_0 : $v(t_0) = x'(t_0)$. Это выражается с помощью формулировки «Мгновенная скорость точки, движущейся прямолинейно, есть производная от её координаты», которая называется механическим смыслом производной.

Чаще всего формулу, выражающую механический смысл производной, записывают в виде: $v(t) = x'(t)$.

Там же, в параграфе 5.1 говорилось и о том, что ускорение есть производная скорости: $a(t) = v'(t)$. Теперь мы можем переписать это соотношение в следующем виде: $a(t) = v'(t) = (x'(t))' = x''(t)$.

Таким образом, установлено, что

Ускорение точки, движущейся прямолинейно, есть вторая производная от её координаты.

В этом и заключается *механический смысл второй производной*.

Чаще всего выражающую его формулу записывают в виде: $a(t) = x''(t)$.

Пример 1. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \frac{1}{2}t^3 + t^2 + 3$, где x – расстояние от начала отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. Найдите её ускорение (в м/с^2) в момент времени $t = 5$ с.

Решение. Поскольку ускорение есть вторая производная от координаты, имеем:

$$a(t) = x''(t) = \left(\frac{1}{2}t^3 + t^2 + 3 \right)'' = \left(\frac{3}{2}t^2 + 2t \right)' = 3t + 2.$$

Подставив в полученную формулу для ускорения $t = 5$, находим:

$$a(5) = 3 \cdot 5 + 2 = 17.$$

Ответ: 17 м/с^2 .

Рассмотрим функцию $f(x)$, определённую и дифференцируемую в некотором открытом интервале $(a; b)$. Мы знаем, что дифференцируемая функция непрерывна, значит, графиком функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ будет некоторая непрерывная гладкая линия (в каждой точке которой можно провести к ней касательную).

Если график функции на интервале $(a; b)$ расположен ниже любой касательной, то он называется *выпуклым вверх* на этом интервале (рис. 5.28 а), а если выше любой касательной, то *выпуклым вниз* на этом интервале (рис. 5.28 б).

Говоря в приведённом выше определении о том, что график расположен выше или ниже касательной, мы молчаливо подразумевали комментарий «Естественно, за исключением самой точки касания».

Часто говорят о *направлениях выпуклости* графика – вверх или вниз.

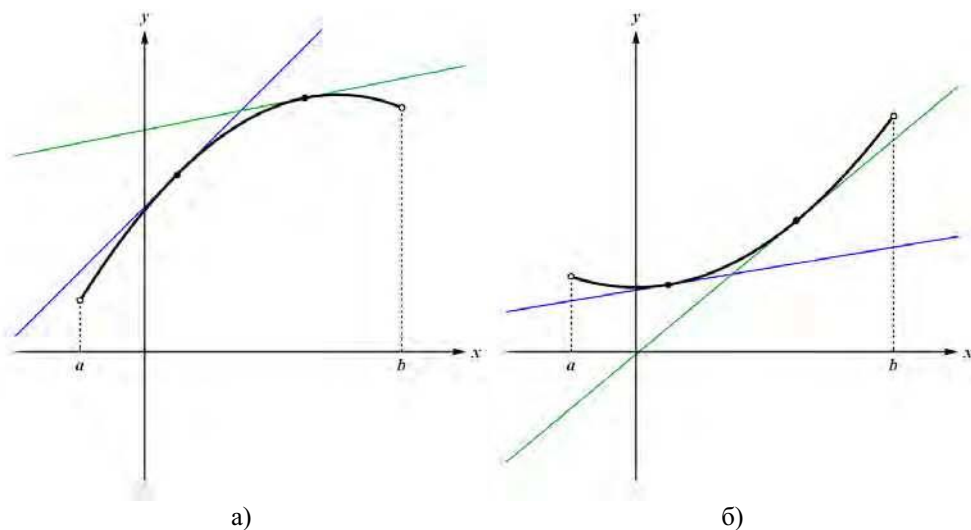


Рис. 5.28

Установим условие выпуклости графика функции вверх и вниз.

Если функция, определённая на некотором открытом интервале, имеет во всех точках этого интервала вторую производную, причём вторая производная положительна во всех точках, то график функции выпуклый вниз на этом интервале.

Понятно, что если во всех точках интервала $(a; b)$ существует вторая производная, то существует и первая производная, а значит, функция непрерывна на интервале $(a; b)$.

Аналогичная теорема имеет место в случае отрицательности второй производной:

Если функция, определённая на некотором открытом интервале, имеет во всех точках этого интервала вторую производную, причём вторая производная отрицательна во всех точках, то график функции выпуклый вверх на этом интервале.

Понятно, что эти две теоремы доказываются похоже, поэтому докажем первую из них – для положительной второй производной.

Возьмём любую точку $x_0 \in (a; b)$ и проведём к графику функции $f(x)$ касательную в точке с абсциссой x_0 . Мы знаем, что уравнение этой касательной имеет вид: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Возьмём любую точку $x \in (a; b)$, отличную от

точки x_0 , и проведём через неё прямую, параллельную оси Oy , которая пересечёт график в точке N , а касательную – в точке M . (рис. 5.29). На рис. 5.29 точка x лежит правее точки x_0 , случай, когда она лежит левее, рассматривается абсолютно аналогично.

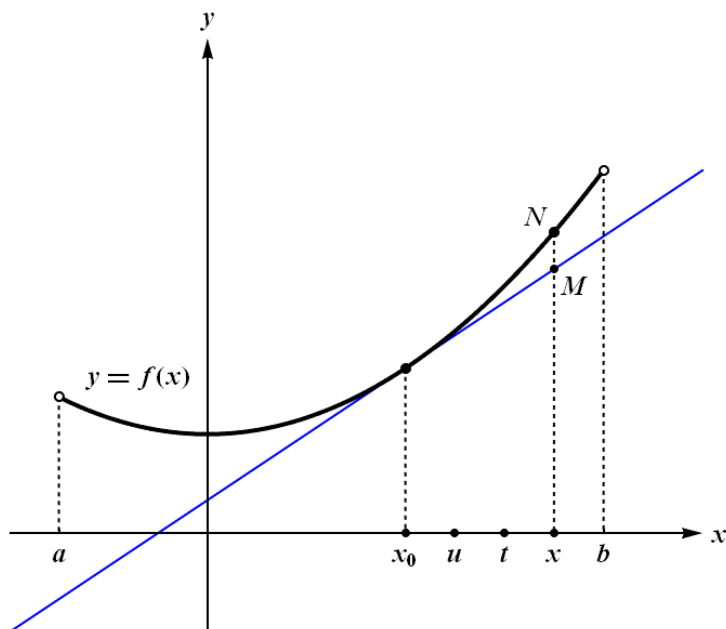


Рис. 5.29

Мы хотим доказать что точка N расположена выше точки M , т.е. ордината точки N больше ординаты точки M . Поскольку ордината точки N равна $f(x)$, а ординаты точки M равна $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, то нам нужно доказать неравенство: $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Мы перепишем это неравенство в виде $f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) > 0$, и будем выяснять, какой знак имеет его левая часть.

Рассмотрим отрезок $[x_0; x]$. Поскольку функция $f(x)$ дифференцируема и непрерывна на интервале $(a; b)$, а отрезок $[x_0; x]$ полностью лежит внутри этого интервала, то функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0; x]$ и дифференцируема

внутри него, а следовательно, к ней можно применить на этом отрезке теорему Лагранжа: существует такая точка $t \in (x_0; x)$, что $f(x) - f(x_0) = f'(t)(x - x_0)$.

Тогда выражение в левой части интересующего нас неравенства переписется в виде:

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = f'(t)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(t) - f'(x_0))(x - x_0).$$

Рассмотрим отрезок $[x_0; t]$. Функция $f'(x)$ дифференцируема и непрерывна на интервале $(a; b)$ – ведь во всех точках этого интервала существует вторая производная $f''(x)$. Поскольку отрезок $[x_0; t]$ полностью лежит внутри интервала $(a; b)$, функция $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[x_0; t]$ и дифференцируема внутри него, а следовательно, к ней можно применить на этом отрезке теорему Лагранжа: существует такая точка $u \in (x_0; t)$, что $f'(t) - f'(x_0) = f''(u)(t - x_0)$.

С учётом полученного равенства интересующее нас выражение переписется в виде:

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(t) - f'(x_0))(x - x_0) = f''(u)(t - x_0)(x - x_0).$$

Но поскольку вторая производная положительна во всех точках интервала $(a; b)$, то $f''(u) > 0$. Кроме того, т.к. $x_0 < t < x$, то $(t - x_0)(x - x_0) > 0$, значит, выражение $f''(u)(t - x_0)(x - x_0)$ положительно, и требуемое неравенство доказано.

Доказанная теорема, называемая *достаточным условием выпуклости графика вниз*, вместе с аналогичной теоремой – достаточным условием выпуклости графика вверх позволяют для графика функции $f(x)$ находить интервалы выпуклости вверх и вниз, вычисляя вторую производную $f''(x)$ и решая соответственные неравенства $f''(x) > 0$ и $f''(x) < 0$.

Но, так же, как и для нахождения интервалов монотонности функции, есть способ, технически более удобный.

Для этого, по аналогии с понятием критической точки, вводится понятие *критической точки второго порядка* функции $f(x)$.

Критической точкой второго порядка функции называется внутренняя точка её области определения, в которой вторая производная этой функции равна нулю или не существует.

Понятно, что при нахождении критических точек второго порядка функции $f(x)$ нужно будет найти сначала вторую производную $f''(x)$, затем решать уравнение $f''(x) = 0$, а также выяснять, в каких точках вторая производная не существует.

Если мы рассмотрим какую-нибудь критическую точку x_0 второго порядка, по разные стороны от которой вторая производная имеет разные знаки, скажем, слева «+», а справа «-», то в точках из левой полуокрестности точки x_0 график функции будет лежать выше касательных к нему, а в точках из правой полуокрестности – ниже касательных к нему (рис. 5.30). Можно сказать, что если провести касательную к графику в точке с абсциссой x_0 , то в этой точке график переходит из одной полуплоскости, определяемой этой касательной, в другую. Принято говорить, что график перегибается в этой точке и называть её *точкой перегиба* графика.

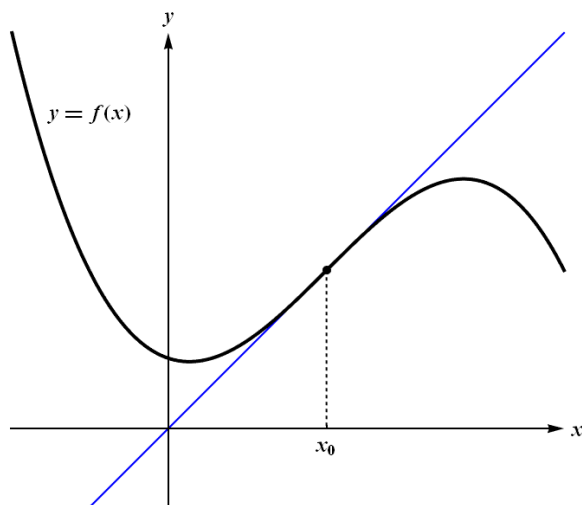


Рис. 5.30

Обратите внимание, мы в рассмотренной ситуации назвали точкой перегиба точку графика с абсциссой x_0 . В некоторых книгах вы сможете увидеть, что точкой перегиба называется сама точка x_0 – здесь, к сожалению, нет устоявшейся терминологии.

При решении задач удобно пользоваться следующей схемой исследования функции на направления выпуклостей и точки перегиба.

- 1) Находится область определения $D(f)$ функции $f(x)$.
- 2) Находится вторая производная $f''(x)$ – ясно, что предварительно придётся найти первую производную $f'(x)$.
- 3) Находятся критические точки второго порядка функции $f(x)$.

4) Изображается область определения $D(f)$ и на неё наносятся критические точки второго порядка (закрашенными).

5) На каждом из образовавшихся интервалов определяется знак второй производной (с помощью пробной точки или других соображений).

6) На тех интервалах, где вторая производная положительна, график функции выпуклый вниз, а на тех интервалах, где вторая производная отрицательна, график функции выпуклый вверх.

7) Если при переходе через критическую точку второго порядка, в которой вторая производная равна нулю, производная меняет знак, то соответствующая точка графика является точкой перегиба.

Посмотрим, как реализуется предложенная схема на практике.

Пример 2. Найдите интервалы выпуклости вверх и вниз, а также точки перегиба графика функции $y = x^4 - 4x^3 + 5x + 1$.

Решение. Область определения функции: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Вычислим сначала первую производную:

$$y' = (x^4 - 4x^3 + 5x + 1)' = 4x^3 - 12x^2 + 5,$$

а затем вторую производную:

$$y'' = (4x^3 - 12x^2 + 5)' = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2).$$

Приравнявая вторую производную к нулю, находим критические точки второго порядка функции $y = x^4 - 4x^3 + 5x + 1$. Это 0 и 2.

Изображаем область определения – всю числовую ось, и наносим на неё критические точки второго порядка: 0 и 2 (закрашенными) (рис. 5.31). Обычно над осью принято отображать информацию о второй производной (её знак), а под осью – о функции (выпуклость вверх или вниз). Вся эта информация приведена на рис. 5.31.

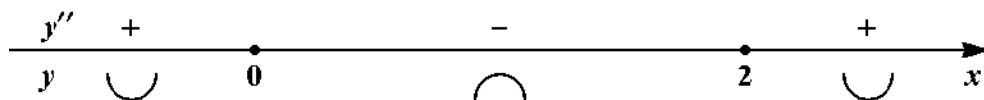


Рис. 5.31

Таким образом, заключаем, что на каждом из интервалов $(-\infty; 0]$ и $[2; +\infty)$ график функции выпуклый вниз, а на интервале $[0; 2]$ выпуклый вверх. Кроме того, поскольку при переходе через каждую критическую точку второго порядка вторая производная меняет знак, то соответственные точки графика являются точками перегиба. Вычислим ординаты этих точек: $y(0) = 1$; $y(2) = 16 - 32 + 10 + 1 = -5$.

Ответ: График выпуклый вниз на каждом из интервалов $(-\infty; 0]$ и $[2; +\infty)$. График функции выпуклый вверх интервале $[0; 2]$. Точки перегиба $(0; 1)$ и $(2; -5)$.

С помощью второй производной можно также в некоторых случаях устанавливать, является ли критическая точка функции точкой максимума или точкой минимума. Имеет место следующее *достаточное условие экстремума*:

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором открытом интервале $(a; b)$ и имеет во всех точках этого интервала вторую производную, которая является непрерывной. Пусть на интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ имеет единственную критическую точку x_0 . Тогда при $f''(x_0) < 0$ эта критическая точка является точкой максимума, а при $f''(x_0) > 0$ – точкой минимума.

Заметим, что теорема ничего не говорит о ситуации, когда $f''(x_0) = 0$. В этом случае теорема попросту не работает, и требуется дополнительное исследование. Заметим также, что поскольку по условию во всех точках интервала существует вторая производная, критическая точка x_0 такова, что $f'(x_0) = 0$.

Докажем теорему для случая $f''(x_0) < 0$. Рассмотрим график функции $y = f(x)$ и проведём к нему касательную в точке с абсциссой x_0 . Поскольку $f'(x_0) = 0$, то эта касательная параллельна оси Ox и задаётся уравнением $y = f(x_0)$.

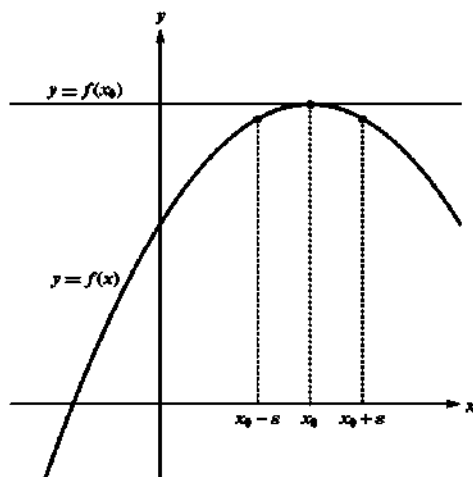


Рис. 5.32

Т.к. вторая производная функции $f'(x)$, функция $f''(x)$, непрерывна в точке x_0 и $f''(x_0) < 0$, то существует такая окрестность точки x_0 , скажем, $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, что $f''(x) < 0$ при всех $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$. А это значит, что график функции $y = f(x)$ выпуклый вверх на интервале $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, а значит, график функции $y = f(x)$ лежит на этом интервале ниже горизонтальной касательной $y = f(x_0)$, т.е. $f(x) < f(x_0)$ при всех $x \in (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, кроме точки x_0 . По определению точки максимума это и значит, что точка x_0 является точкой максимума функции $y = f(x)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим, как применяется доказанное достаточное условие экстремума на практике.

Пример 3. Для функции $y = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 11$ найдите точки максимума и точки минимума.

Решение. Область определения функции: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Вычислим производную:

$$y' = (3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 11)' = 12x^3 - 24x^2 - 36x = 12x(x^2 - 2x - 3).$$

Решая уравнение $12x(x^2 - 2x - 3) = 0$, находим три критические точки: -1 ; 0 и 3 .

Для дальнейшего исследования этих критических точек вычислим вторую производную:

$$y'' = (y')' = (12x^3 - 24x^2 - 36x)' = 36x^2 - 48x - 36 = 12(3x^2 - 4x - 3).$$

Теперь исследуем отдельно каждую критическую точку:

1) Т.к. $y''(-1) = 12(3 + 4 - 3) > 0$, то это точка минимума: $x_{\min} = -1$.

2) Т.к. $y''(0) = 12(0 - 0 - 3) < 0$, то это точка максимума: $x_{\max} = 0$.

3) Т.к. $y''(3) = 12(27 - 12 - 3) > 0$, то это точка минимума: $x_{\min} = 3$.

Ответ: $x_{\min} = -1$; $x_{\max} = 0$; $x_{\min} = 3$.



- 1 а) Что называется второй производной функции?
б) Что называется производными высших порядков?
- 2 а) В чём заключается механический смысл второй производной?
б) Для какой функции формулируется механический смысл второй производной?
- 3 а) Что называется для графика функции интервалом выпуклости вниз?
б) Что называется для графика функции интервалом выпуклости вверх?
- 4 а) Что называется точкой перегиба графика функции?
б) Может ли график функции не иметь точек перегиба?
в) Сколько точек перегиба может иметь график функции?
- 5 а) Расскажите, приводя примеры, как найти интервалы выпуклости графика функции.
а) Расскажите, приводя примеры, как найти точки перегиба графика функции.
- 6 а) Может ли график функции иметь только два интервала выпуклости, причём оба интервала выпуклости вниз? Если нет, объясните, почему. Если да, приведите пример.
б) Может ли график непрерывной функции иметь только три интервала выпуклости, причём все они – интервалы выпуклости вверх? Если нет, объясните, почему. Если да, приведите пример.
- 7 По графику функции найдите координаты точек перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз.

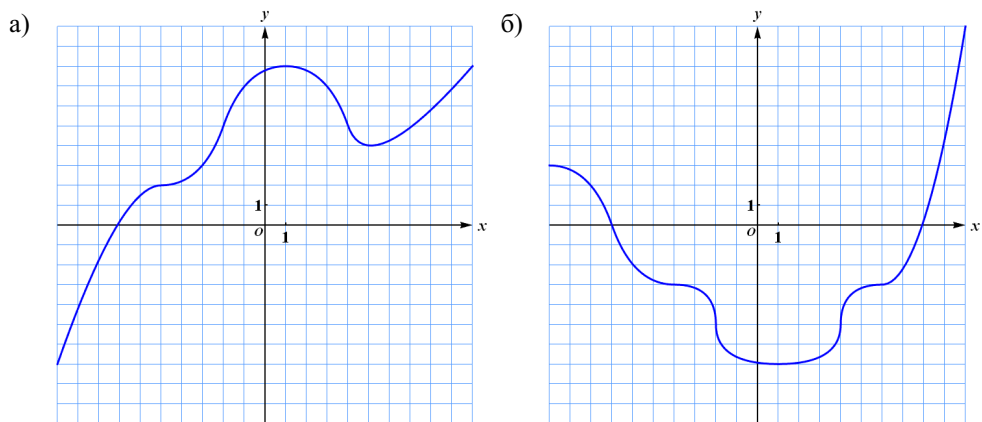


Рис. 5.33

- 8 По графику второй производной функции найдите абсциссы точек перегиба и интервалы выпуклости вверх и вниз.

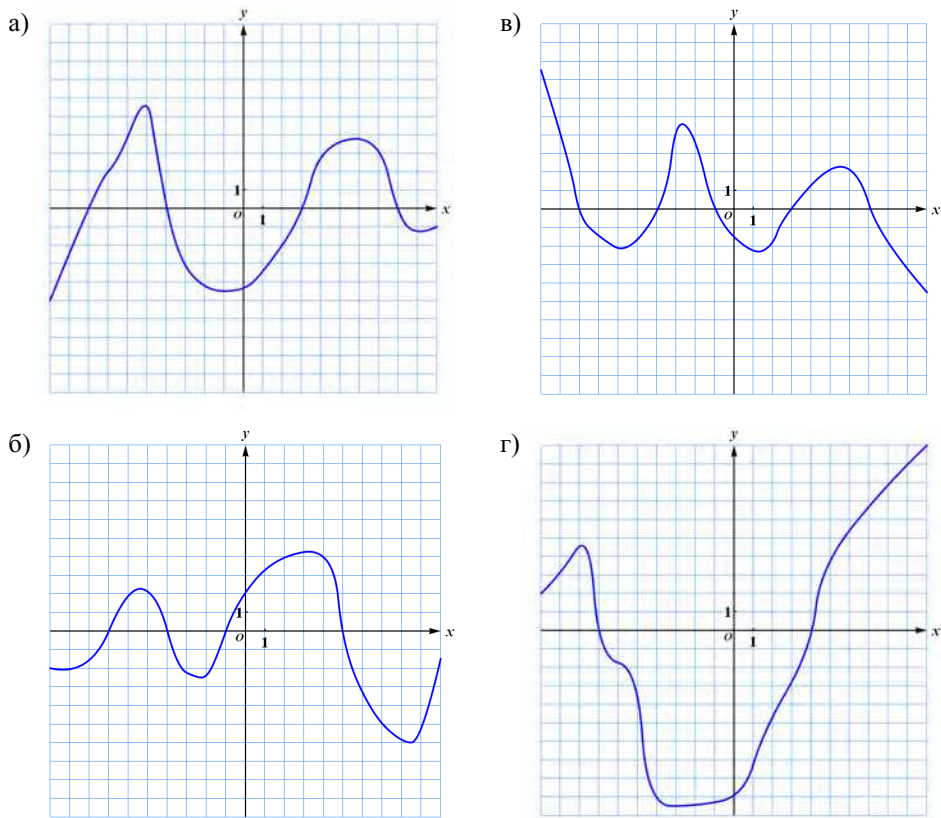


Рис. 5.34

9) Найдите вторую производную функции.

а) $y = \frac{4x-4}{-2x-2};$

в) $y = \frac{x+1}{4-4x};$

б) $y = \frac{2x-3}{4x-2};$

г) $y = \frac{2x-1}{3-5x}.$

10) Найдите вторую производную функции.

а) $f(x) = \frac{x^2-3x-2}{3x+4};$

в) $f(x) = \frac{-x^2+4x+5}{5x-2};$

б) $f(x) = \frac{2x^2-3x-2}{3x};$

г) $f(x) = \frac{x^2+x-4}{3-2x}.$

11) Найдите вторую производную функции.

- а) $f(x) = x \sin 3x$; в) $f(x) = (1 + \cos x)^2$;
 б) $f(x) = x + \frac{1}{x-1} + (x+3)^2$; г) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^4}$.

12 Материальная точка движется закону $x(t) = t^4 + t^2$, где x – расстояние от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. За какое время с момента $t = 2$ с ускорение увеличится в 3 раза?

13 Две материальные точки движутся по законам $x_1(t) = \frac{t^2}{t+1}$ и $x_2(t) = \frac{t^2}{t+8}$, где x_1 и x_2 – расстояния от точки отсчёта в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения. В какие моменты времени материальные точки движутся с одинаковым ускорением?

14 Материальная точка движется по закону $x(t) = at^4 + t^3 + t^2 + t + 1$, где x – расстояние от точки отсчёта в мм, t – время в секундах, измеренное с начала движения. При каком значении параметра a в момент времени $t = 10$ с она будет иметь ускорение, равное 12062 мм/с^2 .

15 Материальная точка движется по закону $x(t) = t^4 + t^2 + 2$, где x – расстояние от точки отсчёта в м, t – время в секундах, измеренное с начала движения. Какое ускорение она имеет, когда она пройдет расстояние 8 м?

16 Определите, на каких интервалах графики выпуклы вверх и на каких – вниз.

- а) $y = x^2 + 2x$; в) $y = x^5$;
 б) $y = x^3 - 24x + 3$; г) $y = x^5 - 5x$.

17 Найдите точки экстремума функции, используя достаточное условие экстремума со второй производной.

- а) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$; в) $y = -8x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 12$;
 б) $y = 4x^3 - 5x^2 - 22x - 1$; г) $y = 4x^3 + 2x^2 - x - 1$.

18 Найдите точки экстремума функции, используя достаточное условие экстремума со второй производной.

- а) $y = x + \frac{4}{x}$; в) $y = \frac{2x-1}{x^2-4x+2}$;
 б) $y = \frac{x+2}{x^2+4x+5}$; г) $y = 2x - \frac{3}{1-x} + 2\sqrt{6}$.

19 Определите, на каких интервалах графики выпуклы вверх и на каких – вниз.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = \cos 3x - 12 \cos 6x; & \text{в) } y = \frac{2 \sin x - 4 \cos x}{\sin x + \cos x + 1,5}; \\ \text{б) } y = \cos x \cos 3x - \sin^2 x; & \text{г) } y = \frac{\sin 3x - \cos 2x}{\cos 2x + 2 \sin 3x + 3}. \end{array}$$

27 Исследуйте функции на направление выпуклостей и перегибы.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = \frac{2x+1}{x^2+x+2}; & \text{в) } y = \frac{x^8}{x^4+2} + \frac{x^6}{x^4+4}; \\ \text{б) } y = x + \frac{x^3}{2+5x+x^2}; & \text{г) } y = \frac{2x - \frac{59}{100}}{4-5x} + \frac{2x^2-3x-7}{3-5x}. \end{array}$$

28 Исследуйте функции на направление выпуклостей и перегибы.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = \frac{1}{\cos 2x - \sin x + 2}; & \text{б) } y = \frac{1}{9} \cos 3x - \frac{1}{4} \cos 2x + \sin x. \end{array}$$

29 Докажите, что если функция, определённая на некотором открытом интервале, имеет во всех точках этого интервала вторую производную, причём вторая производная отрицательна во всех точках, то график функции выпуклый вверх на этом интервале (достаточное условие выпуклости графика функции вверх).

М

30 *Подграфиком* непрерывной на интервале функции называется множество всех точек координатной плоскости, лежащих ниже графика этой функции на этом интервале. Докажите, что график функции $f(x)$, имеющей вторую производную во всех точках интервала $(a; b)$, выпуклый вверх на этом интервале в том и только в том случае, когда подграфик этой функции, т.е. множество $\{(x; y) : y \leq f(x), x \in (a; b)\}$, является выпуклым множеством плоскости. Напомним, что множество на плоскости называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками оно целиком содержит отрезок, соединяющий эти точки.

31 По аналогии с предыдущей задачей дайте определение *надграфика* непрерывной на интервале функции и докажите, что график функции $f(x)$, имеющей вторую производную во всех точках интервала $(a; b)$, выпуклый вниз на этом интервале в том и только в том случае, когда надграфик этой функции является выпуклым множеством плоскости.

32 Пользуясь выпуклостью вниз графика функции $y = x^2$ на всей области определения, докажите неравенства:

а) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 < \frac{a^2+b^2}{2}$ для любых действительных a и b , таких что $a \neq b$;

б) $(ta+(1-t)b)^2 < ta^2+(1-t)b^2$ для любых действительных a и b , таких что $a \neq b$, и любого действительного $t \in (0; 1)$.

33 Пользуясь выпуклостью вверх графика функции $y = \sqrt{x}$ на всей области определения, докажите неравенства:

а) $\sqrt{\frac{a+b}{2}} > \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$ для любых действительных неотрицательных a и b , таких что $a \neq b$;

б) $\sqrt{ta+(1-t)b} > t\sqrt{a}+(1-t)\sqrt{b}$ для любых действительных неотрицательных a и b , таких что $a \neq b$, и любого действительного $t \in (0; 1)$.

34 Докажите, что если график функции $y = f(x)$ выпуклый вниз на интервале $(p; q)$, то справедливы неравенства:

а) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a)+f(b)}{2}$ для любых действительных $a, b \in (p; q)$, таких что $a \neq b$;

б) $f(ta+(1-t)b) < t \cdot f(a) + (1-t) \cdot f(b)$ для любых действительных a и $b \in (p; q)$, таких что $a \neq b$, и любого действительного $t \in (0; 1)$.

35 Докажите, что если график функции $y = f(x)$ выпуклый вверх на интервале $(p; q)$, то справедливы неравенства:

а) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a)+f(b)}{2}$ для любых действительных $a, b \in (p; q)$, таких что $a \neq b$;

б) $f(ta+(1-t)b) > t \cdot f(a) + (1-t) \cdot f(b)$ для любых действительных a и $b \in (p; q)$, таких что $a \neq b$, и любого действительного $t \in (0; 1)$.

ОТВЕТЫ

К параграфу 1.1

6. а) 360° ; 720° ; 1440° ; 2520° ; б) 72° ; 180° ; в) 1080° ; 2160° ; 2880° ; 4680° ; г) 280° ; 234° .

7. а) 2π ; 6π ; 12π ; 22π ; б) $\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{3}$; в) 4π ; 14π ; 28π ; 200π ; г) π ; $\frac{3\pi}{2}$.

8. а) $\frac{\pi}{9}$; $\frac{\pi}{5}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{20\pi}{9}$; б) $\frac{4\pi}{45}$; $\frac{2\pi}{15}$; $\frac{8\pi}{15}$; $\frac{7\pi}{2}$; в) $\frac{3\pi}{10}$; $\frac{19\pi}{18}$; $\frac{13\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{5}$; г) $\frac{7\pi}{20}$; $\frac{3\pi}{5}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{2}$.

9. а) 0 ; $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{25\pi}{9}$; б) $-\frac{11\pi}{20}$; $-\frac{11\pi}{12}$; $-\frac{9\pi}{4}$; -9π ; в) $-\frac{8\pi}{45}$; $-\frac{2\pi}{9}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$;

г) $-\frac{\pi}{12}$; $-\frac{7\pi}{30}$; $-\frac{22\pi}{45}$; $-\frac{5\pi}{2}$.

10. а) 540° ; 60° ; 120° ; 135° ; б) $\left(\frac{360}{\pi}\right)^\circ$; $\left(\frac{1260}{\pi}\right)^\circ$; $\left(\frac{1800}{\pi}\right)^\circ$; $\left(\frac{2340}{\pi}\right)^\circ$;

в) $\left(\frac{60}{\pi}\right)^\circ$; $\left(\frac{270}{\pi}\right)^\circ$; $\left(\frac{600}{\pi}\right)^\circ$; $\left(\frac{540}{7\pi}\right)^\circ$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$; $\left(\frac{450}{\pi}\right)^\circ$; $\left(\frac{675}{2\pi}\right)^\circ$; 162° .

11. а) 720° ; 36° ; -150° ; -225° ; б) $\left(\frac{360}{\pi}\right)^\circ$; $-\left(\frac{1260}{\pi}\right)^\circ$; $\left(\frac{1080}{\pi}\right)^\circ$; $-\left(\frac{1980}{\pi}\right)^\circ$;

в) $\left(\frac{36}{\pi}\right)^\circ$; $-\left(\frac{135}{\pi}\right)^\circ$; $-\left(\frac{198}{\pi}\right)^\circ$; $\left(\frac{32400}{179\pi}\right)^\circ$; г) -95° ; 82° ; $-\left(\frac{810}{\pi}\right)^\circ$; $-\left(\frac{420}{\pi}\right)^\circ$.

12. а) 30° ; 80° ; 400° ; б) 115° ; 172° ; 147° ; в) $19,1^\circ$; $85,9^\circ$; $9,5^\circ$;

г) $13,85^\circ$; $60,02^\circ$; $190,99^\circ$.

13. а) 3; 5; 10; 11; б) 3,2; 6,9; 10; 12,3; в) 10; 10; 40; 90; г) 0,47; 0,51; 0,72; 1,47.

14. а) $46^\circ = 46^\circ + 360^\circ \cdot 0$; б) $-729^\circ = 351^\circ + 360^\circ \cdot (-3)$; в) $-316^\circ = 44^\circ + 360^\circ \cdot (-1)$;

г) $1374^\circ = 294^\circ + 360^\circ \cdot 3$.

15. а) $-\frac{67\pi}{90} = \frac{113\pi}{90} + 2\pi \cdot (-1)$; б) $\frac{77\pi}{30} = \frac{17\pi}{30} + 2\pi \cdot 1$; в) $\frac{301\pi}{180} = \frac{301\pi}{180} + 2\pi \cdot 0$;

г) $-\frac{232\pi}{45} = \frac{38\pi}{45} + 2\pi \cdot (-3)$.

16. а) 135° ; б) π ; в) 2° ; г) $\frac{4\pi}{3}$.

17. а) -283° ; б) $-\frac{7\pi}{8}$; в) -175° ; г) $-\frac{\pi}{5}$.

18. а) -110° ; б) $-\frac{2\pi}{5}$; в) 131° ; г) $\frac{14\pi}{15}$.

К параграфу 1.2

2. а) да; б) нет; в) нет; г) да; д) да; е) нет.
3. а) да; б) да; в) нет; г) нет; д) нет; е) да.
4. а) 1; 0; б) 1; 0; в) 0; 1; г) -1; 0; д) 1; 0; е) 0; -1.
5. а) 0; -1; б) -1; 0; в) 1; 0; г) 0; 1; д) 0; -1; е) -1; 0.
6. а) 0; 1; б) -1; 0; в) 0; -1; г) 1; 0.
7. а) $\alpha = \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; в) $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
г) $\alpha = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; д) $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; е) $\alpha = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
8. а) -; -; +; +; б) +; -; -; -; в) -; +; -; -; г) +; -; -; -; д) +; +; +; +; е) -; +; -; -.
9. а) +; -; -; -; б) -; +; -; -; в) +; +; +; +; г) +; -; -; -; д) +; +; +; +; е) +; +; +; +.
10. а) -; б) -; в) -; г) +; д) +; е) +.
11. а) -; б) -; в) +; г) -; д) -; е) -.
12. а) Нет; б) да; в) нет; г) да; д) да; е) да; ж) да; з) да; и) да.
13. а) $2\sqrt{2}$; б) $5 - \sqrt{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3} = \sqrt{\frac{77}{6}} + 5\sqrt{6}$; г) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{13}{\sqrt{3}}$.
14. а) $1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; в) $-\sqrt{3}$; г) $2 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{3}$.
15. а) $\frac{1}{2}$; б) $1 + \frac{5}{\sqrt{2}} + \sqrt{3}$; в) $2 - \frac{9\sqrt{3}}{2}$; г) $-1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$.
16. а) $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; б) 7; в) $3 - \sqrt{2} - 4\sqrt{3}$; г) $\frac{1}{2} - \sqrt{3}$.
17. а) Да; б) нет; в) нет; г) да; д) да; е) да.

К параграфу 1.3

1. а) Нет; б) да.
3. Нет.
4. а) $-\frac{3}{2}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
5. а) $\sqrt{2}$; б) $-\frac{5}{13}$; в) -10.

6. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$.
7. $-\frac{1}{\sqrt{17}}$.
8. -2 .
9. $\frac{\sqrt{19}}{9}$.
10. $\sqrt{\frac{5}{6}}$.
11. $\frac{3}{5}$.
12. 5 .
13. $-2\sqrt{2}$.
14. $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}$.
15. $\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$.
16. а) $\operatorname{ctg}^2 \alpha$; б) 1 ; в) -1 ; г) 1 .
17. а) 1 ; б) 0 ; в) $\operatorname{tg} \alpha$; г) $\cos^2 \alpha$.
20. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$.
21. $-\frac{1}{\sqrt{5}}$.
22. 2 или -2 .
23. $-\frac{5}{18}$.
24. $-\sqrt{\frac{5}{3}}$.
25. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.
26. $\frac{299}{2000}$.
27. а) 14 ; б) 52 ; в) 194 .
28. а) $\cos \alpha + \sin \alpha$; б) 1 ; в) $8\sin^2 \alpha$; г) $5+3\cos \alpha$.

29. $\frac{29}{19}$.

30. $\frac{19}{5}$.

32. Наименьшее значение равно $\frac{1}{2}$, наибольшее равно 1.

К параграфу 1.4

4. а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; д) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5. а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; в) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $-\frac{1}{2}$.

6. а) 0; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; д) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. а) 1; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{3}$; г) 1.

8. а) 1; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; д) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

9. а) $-\sqrt{3}$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $\sqrt{3}$; г) $\sqrt{3}$.

10. а) $\cos \beta \sin \alpha$; б) $\cos \alpha \cos \beta$; в) $2 \cos \beta \sin \alpha$; г) $-2 \sin \alpha \sin \beta$.

11. а) $\sin 3\alpha$; б) $\cos \alpha$; в) $\operatorname{tg} \alpha$; г) $\operatorname{tg} 5\alpha$.

12. а) $\sqrt{3} \sin \alpha$; б) 0; в) $-\sin \alpha$; г) $\sqrt{3} \cos \alpha$.

13. а) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$; б) $-\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$; в) $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$; г) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$.

14. а) $\frac{4+\sqrt{2}}{6}$; б) $-\frac{\sqrt{3}}{10}(1+2\sqrt{2})$; в) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{7}{12} + \frac{1}{\sqrt{6}}}$; г) $\frac{9\sqrt{2}+4\sqrt{5}}{22}$.

15. $-\frac{6+\sqrt{35}}{12}$.

16. $\frac{3(4-\sqrt{7})}{20}$.

17. $\frac{\sqrt{11}-5\sqrt{35}}{36}$.

18. $\frac{8\sqrt{2}+\sqrt{33}}{21}$.

20. а) $-\cos 4\alpha \sin \alpha$; б) $\cos 2\alpha \cos 9\alpha$; в) $\sin 9\alpha \cos 11\alpha$; г) $-\sin 3\alpha \sin 7\alpha$.

21. а) $-\operatorname{tg} \alpha$; б) $\frac{1+(\sqrt{3}-1)\operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{3}}$; в) $-\sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha$; г) $1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-1\right)\operatorname{ctg} \alpha$.

22. а) -1 ; б) $-\sqrt{2}$; в) $\sqrt{2}$; г) -2 ; д) $-\sqrt{2}$; е) $\sqrt{2}$.

К параграфу 1.5

2. а) $2 \cdot 60^\circ$; б) $2 \cdot 42^\circ$; в) $2 \cdot 169^\circ$; г) $2 \cdot 21^\circ$.

3. а) $2 \cdot \frac{3\pi}{4}$; б) $2 \cdot \frac{5\pi}{12}$; в) $2 \cdot \frac{13\pi}{15}$; г) $2 \cdot \frac{23\pi}{180}$.

4. а) 70° ; б) 25° ; в) 101° ; г) 69° .

5. а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{3\pi}{20}$; в) $\frac{25\pi}{36}$; г) $\frac{\pi}{60}$.

9. а) 1 ; б) $\frac{1}{4}$; в) 4 ; г) 0 .

10. а) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $-\frac{1}{4}$; в) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$; г) $\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$.

11. а) $-\frac{17}{25}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{50}$; г) $\frac{1}{7}$; д) $2m^2 - 1$; е) $2z - z^2$.

12. а) $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$; б) $-\frac{4\sqrt{6}}{25}$; в) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; г) $\frac{\sqrt{15}}{8}$.

13. а) $\frac{11}{25}$; б) $\frac{99}{100}$; в) $-\frac{4}{5}$; г) $\frac{91}{100}$.

14. а) 1 ; б) $\cos \alpha + \cos 2\alpha$; в) $\cos 2\alpha$; г) $4\cos \alpha - 1$.

15. а) $\operatorname{tg} \alpha$; б) $\operatorname{ctg} \alpha$; в) $\cos 2\alpha$; г) $\cos^2 \alpha$.

17. а) $-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}; \frac{4}{3}; \frac{3}{4}$; б) $\frac{12}{13}; \frac{5}{13}; \frac{12}{5}; \frac{5}{12}$; в) $\frac{20}{29}; -\frac{21}{29}; -\frac{20}{21}; -\frac{21}{20}$; г) $-\frac{7}{25}; -\frac{24}{25}; \frac{7}{24}; \frac{24}{7}$.

18. а) $\operatorname{tg} \alpha$; б) $\sin 2\alpha$; в) $\cos 2\alpha - \sin \alpha$; г) $\sin 4\alpha$.

20. $-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

21. -2 .

22. $-\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{4}{\sqrt{65}}}$.

23. $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

$$24. \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{\frac{2}{3}}}.$$

$$25. \text{ Либо } -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}(6+\sqrt{11})}, \text{ либо } -\frac{1}{2}\sqrt{2-\frac{\sqrt{11}}{3}}.$$

$$26. -\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

$$27. -\frac{8}{17}; \frac{15}{17}.$$

$$28. \text{ а) } \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2}; \text{ б) } 2 \sin \alpha - 4 \cos \alpha.$$

$$29. \text{ а) } 3; -\frac{3}{2}; \text{ б) } \frac{9}{8}; -2; \text{ в) } \frac{3\sqrt{3}}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}; \text{ г) } \frac{9}{8}; -2.$$

$$31. -\frac{1}{8}.$$

К параграфу 1.6

$$3. \text{ а) } -\sin \alpha; \text{ б) } \cos \alpha; \text{ в) } -\operatorname{tg} \alpha; \text{ г) } \operatorname{ctg} \alpha; \text{ д) } -\sin \alpha; \text{ е) } \sin \alpha.$$

$$4. \text{ а) } \cos \alpha; \text{ б) } -\sin \alpha; \text{ в) } \operatorname{ctg} \alpha; \text{ г) } -\operatorname{ctg} \alpha; \text{ д) } -\cos \alpha; \text{ е) } \sin \alpha.$$

$$5. \text{ а) } \cos 43^\circ; \text{ б) } -\sin 38^\circ; \text{ в) } -\operatorname{ctg} 20^\circ; \text{ г) } \operatorname{ctg} 1^\circ; \text{ д) } -\sin 2^\circ; \text{ е) } -\cos 16^\circ.$$

$$6. \text{ а) } -\sin \frac{2\pi}{9}; \text{ б) } \cos \frac{\pi}{20}; \text{ в) } -\operatorname{tg} \frac{\pi}{30}; \text{ г) } \operatorname{ctg} \frac{\pi}{45}; \text{ д) } -\sin \frac{5\pi}{36}; \text{ е) } -\sin \frac{13\pi}{60}.$$

$$7. \text{ а) } -\cos 34^\circ; \text{ б) } \sin 42^\circ; \text{ в) } \operatorname{tg} 39^\circ; \text{ г) } -\operatorname{tg} 9^\circ; \text{ д) } -\sin 3^\circ; \text{ е) } -\sin 28^\circ.$$

$$8. \text{ а) } \cos \frac{3\pi}{14}; \text{ б) } \sin \frac{4\pi}{45}; \text{ в) } \operatorname{tg} \frac{\pi}{45}; \text{ г) } -\operatorname{tg} \frac{7\pi}{30}; \text{ д) } \sin \frac{2\pi}{9}; \text{ е) } -\sin \frac{\pi}{15}.$$

$$9. \text{ а) } -\frac{1}{2}; \text{ б) } \frac{1}{2}; \text{ в) } -\sqrt{3}; \text{ г) } 1; \text{ д) } \frac{1}{2}; \text{ е) } \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$10. \text{ а) } \frac{1}{2}; \text{ б) } \frac{1}{2}; \text{ в) } -1; \text{ г) } -\sqrt{3}; \text{ д) } -\frac{1}{2}; \text{ е) } -\frac{1}{2}.$$

$$11. \text{ а) } -\frac{1}{\sqrt{2}}; \text{ б) } -\frac{1}{\sqrt{2}}; \text{ в) } -\sqrt{3}; \text{ г) } -\frac{1}{\sqrt{3}}; \text{ д) } -\frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ е) } -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$12. \text{ а) } -\frac{1}{\sqrt{2}}; \text{ б) } \frac{1}{\sqrt{2}}; \text{ в) } \sqrt{3}; \text{ г) } -\sqrt{3}; \text{ д) } -\frac{1}{2}; \text{ е) } \frac{1}{2}.$$

$$15. \text{ а) } -\frac{5\sqrt{3}}{2}; \text{ б) } \frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{2}; \text{ в) } \frac{3}{2}(\sqrt{2} - \sqrt{3}); \text{ г) } 1 + \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$16. \text{ а) } \frac{4}{\sqrt{3}}; \text{ б) } -\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}; \text{ в) } -\frac{1+\sqrt{3}}{2}; \text{ г) } \frac{5}{\sqrt{3}} - 1.$$

$$17. \text{ а) } \operatorname{tg} \alpha; \text{ б) } \frac{\sin(\alpha - 45^\circ)}{\sin(\alpha + 45^\circ)}; \text{ в) } \sin^2 \alpha; \text{ г) } \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$18. \text{ а) } \frac{\sin^2 \beta}{4}; \text{ б) } \frac{2}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha}; \text{ в) } \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}; \text{ г) } 1.$$

$$21. \text{ а) } \operatorname{ctg}^4 \alpha; \text{ б) } \frac{3 \cos 4\alpha - 1}{4}; \text{ в) } -\frac{1}{2}; \text{ г) } -\cos^2 \frac{\alpha}{4}.$$

К параграфу 1.7

$$2. \text{ а) } 2 \cos 2\alpha \sin 5\alpha; \text{ б) } 2 \cos \frac{11\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}; \text{ в) } -2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{7\alpha}{2}; \text{ г) } 2 \cos \alpha \cos 5\alpha.$$

$$3. \text{ а) } \cos 20^\circ; \text{ б) } \sin 40^\circ; \text{ в) } -\sin 9^\circ; \text{ г) } \sqrt{2} \sin 14^\circ; \text{ д) } \sqrt{3} \sin 20^\circ; \text{ е) } \sqrt{3} \cos 28^\circ.$$

$$4. \text{ а) } \sin \frac{2\pi}{21}; \text{ б) } \sqrt{3} \sin \frac{11\pi}{60}; \text{ в) } \cos \frac{17\pi}{90}; \text{ г) } -\sqrt{3} \sin \frac{2\pi}{45}; \text{ д) } 2 \sin \frac{7\pi}{36}; \text{ е) } 2 \sin \frac{7\pi}{45}.$$

$$5. \text{ а) } \cos \alpha; \text{ б) } \sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{12} \right); \text{ в) } -\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3} \right); \text{ г) } \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{28} \right).$$

$$6. \text{ а) } \sqrt{\frac{3}{2}}; \text{ б) } \frac{1}{\sqrt{2}}; \text{ в) } \frac{1}{\sqrt{2}}; \text{ г) } -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$8. \text{ а) } 0; \text{ б) } 0; \text{ в) } 0; \text{ г) } 0.$$

$$9. \text{ а) } -\operatorname{ctg} \alpha; \text{ б) } 2 \sin 2\alpha - 1; \text{ в) } \operatorname{tg} 3\alpha; \text{ г) } \frac{1 + 2 \sin \alpha}{1 + 2 \cos \alpha}.$$

$$11. \text{ а) } \frac{1}{2}(\cos 4\alpha - \cos 10\alpha); \text{ б) } \frac{1}{2}(\sin 20\alpha - \sin 2\alpha); \text{ в) } \frac{1}{2}(\sin 7\alpha - \sin 3\alpha);$$

$$\text{ г) } \frac{1}{2}(\cos 6\alpha + \cos 14\alpha).$$

$$12. \text{ а) } \frac{1 + \sqrt{2}}{4}; \text{ б) } \frac{1}{2\sqrt{2}}; \text{ в) } -\frac{1}{4}; \text{ г) } \frac{1 + \sqrt{2}}{4}.$$

$$14. \text{ а) } \frac{1}{4}; \text{ б) } 0; \text{ в) } 0; \text{ г) } -\frac{1}{8}.$$

$$17. \text{ а) } 4 \cos(a - 30^\circ); \text{ б) } 4 \cos(a + 30^\circ).$$

$$18. \text{ а) } \frac{\sqrt{3}}{8}; \text{ б) } \frac{1}{16}; \text{ в) } \frac{1}{8}; \text{ г) } \frac{1}{8}.$$

19. а) $\frac{3}{4} \sin 4\alpha$; б) $\cos 2\alpha$.

20. $\frac{1}{8}$.

К параграфу 1.8*

2. а) $3 \cdot 45^\circ$; б) $3 \cdot 51^\circ$; в) $3 \cdot 31^\circ$; г) $3 \cdot 62^\circ$.

3. а) $3 \cdot \frac{\pi}{2}$; б) $3 \cdot \frac{14\pi}{45}$; в) $3 \cdot \frac{2\pi}{5}$; г) $3 \cdot \frac{13\pi}{36}$.

4. а) 40° ; б) 44° ; в) 48° ; г) 89° .

5. а) $\frac{\pi}{9}$; б) $\frac{\pi}{45}$; в) $\frac{\pi}{20}$; г) $\frac{7\pi}{36}$.

7. а) $150^\circ : 2$; б) $72^\circ : 2$; в) $162^\circ : 2$; г) $120^\circ : 2$.

8. а) $\frac{3\pi}{4} : 2$; б) $\frac{4\pi}{5} : 2$; в) $\frac{3\pi}{10} : 2$; г) $\frac{9\pi}{5} : 2$.

9. а) 40° ; б) 126° ; в) 30° ; г) 258° .

10. а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{15}$; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{10}$.

13. а) $2 - \sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; г) $2 + \sqrt{3}$; д) $\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$;

е) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

14. а) $\sqrt{2} - 1$; б) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; в) $1 + \sqrt{2} + \sqrt{4+2\sqrt{2}}$; г) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; д) $\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$;

е) $\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$.

15. а) 1; б) $-\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}$; в) $\frac{71}{125}$; г) $-\frac{11}{16}$; д) $4x^3 - 3x$; е) -1 .

16. а) $\frac{118}{125}$; б) $\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}$; в) $-\frac{91}{125}$; г) $\frac{9}{2}(3\sqrt{3}-5)$; д) $2(16m^3-3m)$; е) -1 .

17. а) 1; б) $-\frac{10}{9\sqrt{3}}$; в) $-\frac{9\sqrt{3}}{10}$; г) $\frac{\sqrt{2}}{5}; \frac{5}{\sqrt{2}}$; д) $\frac{3y^2-1}{y(y^2-3)}; \frac{y(y^2-3)}{3y^2-1}$;

е) $-\frac{11}{2}; -\frac{2}{11}$.

18. а) $3\cos \alpha$; б) $3\sin \alpha$; в) $-4\sin^3 \alpha$; г) $4\cos^3 \alpha$.

19. а) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$; б) $-\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$; в) $\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{4}$; г) $2 \cos 2\alpha$.

20. а) $\frac{9}{13}$; б) $-\frac{5}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{7}{\sqrt{5}}$; г) $-\frac{299}{970}$.

21. а) $-\frac{488}{191}$; б) -1 ; в) $-\frac{55}{37}$; г) $\frac{9}{13}$.

22. а) $\frac{52}{21}$; б) $-\frac{3}{14}$; в) 2 ; г) 2 .

23. а) $\frac{13}{85}$; б) $\frac{36}{85}$; в) $-\frac{416}{425}$; г) $-\frac{477}{1364}$.

26. $\cos 4\alpha = 1 - 8\cos^2 \alpha + 8\cos^4 \alpha$, $\sin 4\alpha = 4\sin \alpha \cos \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha)$.

27. $\cos 5\alpha = 5\cos \alpha - 20\cos^3 \alpha + 16\cos^5 \alpha$, $\sin 5\alpha = 5\sin \alpha - 20\sin^3 \alpha + 16\sin^5 \alpha$.

28. 4.

К параграфу 1.9

1. $\frac{1}{5}$.

2. $\frac{17}{25}$.

3. $\frac{5}{6}$.

4. $\frac{31}{40}$.

5. $\frac{1}{5}$.

6. $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = \frac{5 + 3\cos 4\alpha}{8}$, $\sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha = -\frac{15\cos 2\alpha + \cos 6\alpha}{16}$.

7. $\frac{13}{25}$.

8. $\frac{31}{54}$.

9. а) $\cos \alpha + \sin \alpha$; б) $2\cos \alpha - \sin \alpha$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\sin^2 2\alpha$.

10. а) -1 ; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{31 + 8\sqrt{3}}{16}$.

12. а) $\frac{3}{2}$; б) $-\frac{1}{8}$; в) $\frac{1}{2}$; г) -1 .
13. а) $\frac{1}{4}$; б) $-\frac{1}{4}$; в) $\frac{\sqrt{5}}{4}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{8}$.
14. а) -1 ; б) $-\frac{\cos \alpha + \cos 3\alpha}{\sin 5\alpha}$; в) $\frac{1}{3-4\cos \alpha}$; г) $\frac{4}{3}\cos \alpha \sin^2 \alpha$.
16. а) -1 ; в) $\frac{4\sqrt{10-\sqrt{2}}}{\sqrt{58+41\sqrt{2}}-16}$; б) 1 ; г) 4 .
17. $\frac{3x-x^3}{2}$.
18. $-\frac{1}{3}$ или 2 .
19. $-\frac{x+x^3}{2}$.
20. $-\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$.
21. $\pm\sqrt{\frac{3\pm 2\sqrt{2}}{6}}$.
22. $\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$.
24. а) $\sin \alpha$; б) $2\cos\left(2\alpha+\frac{3\beta}{2}\right)$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\cos(3\alpha+5\beta)+\operatorname{tg}(5\alpha+2\beta)$.
25. Наибольшее значение равно $\frac{1}{2}$, наименьшее – равно 0 .
28. $\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{3+\sqrt{5}}$.
29. а) Верно; б) верно.
30. а) 0 ; б) 0 .
32. 1 .

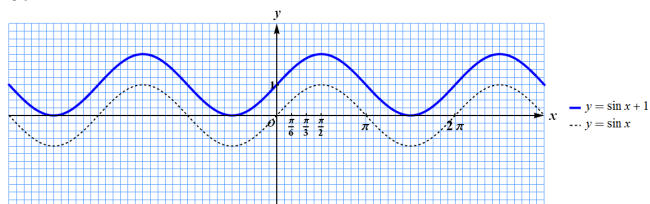
К параграфу 1.10

2. а) $0; -\pi; \pi$; б) $-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}$; в) $-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$; г) скажем, любое число из интервала $x \in (0; \pi)$; д) скажем, любое число из интервала $x \in (\pi; 2\pi)$.

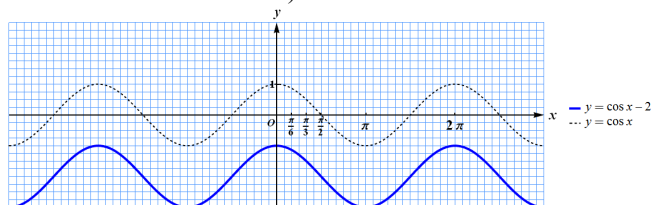
3. а) $-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$; б) $0; -2\pi; 2\pi$; в) $-\pi; \pi$; г) скажем, любое число из интервала $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; д) скажем, любое число из интервала $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.
4. а) $-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$; б) $0; -2\pi; -\pi; \pi; 2\pi$; в) скажем, любое число из интервала $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; г) скажем, любое число из интервала $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
5. а) $0; -2\pi; -\pi; \pi; 2\pi$; б) $-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$; в) скажем, любое число из интервала $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; г) скажем, любое число из интервала $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
6. а) $x \in R; y \in [-1; 1]$; б) $x \in R; y \in [-1; 1]$; в) $x \in R \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right\}; y \in R$; г) $x \in R \setminus \{\pi n, n \in Z\}; y \in R$.
8. а) $-$; б) $+$; в) $+$; г) $+$; д) $-$.
9. а) $-$; б) $+$; в) $+$; г) $-$; д) $+$.
10. а) $+$; б) $-$; в) $+$; г) $-$; д) $-$.
11. а) $+$; б) $+$; в) $-$; г) $-$; д) $+$.
12. а) $\sin 2 > \sin 3$; б) $\sin \frac{3}{2} > \sin \frac{3}{4}$; в) $\sin 6 > \sin 5$; г) $\sin 5 < \sin 5,5$; д) $\sin 1,8 > \sin 2,5$; е) $\sin \sqrt{3} > \sin \sqrt{5}$.
13. а) $\cos 4 < \cos 4,5$; б) $\cos \frac{11}{2} < \cos 6$; в) $\cos \frac{12\pi}{5} < \cos \frac{11\pi}{5}$; г) $\cos 3,7 < \cos 4,5$; д) $\cos \sqrt{7} < \cos \sqrt{6}$; е) $\cos 3,3 < \cos 3,6$.
14. а) $\operatorname{tg} 2 < \operatorname{tg} 3$; б) $\operatorname{tg} 3,7 > \operatorname{tg} \frac{7}{2}$; в) $\operatorname{tg} \frac{22}{5} > \operatorname{tg} \frac{17}{5}$; г) $\operatorname{tg} \sqrt{8} > \operatorname{tg} \frac{3}{\sqrt{2}}$; д) $\operatorname{tg} 5,2 < \operatorname{tg} 5,9$; е) $\operatorname{tg} 6,3 < \operatorname{tg} 7$.
15. а) $\operatorname{ctg} 1 > \operatorname{ctg} 1,5$; б) $\operatorname{ctg}(\sqrt{3}-1) > \operatorname{ctg} 1$; в) $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{7} < \operatorname{ctg} \frac{6\pi}{11}$; г) $\operatorname{ctg} 0,2 > \operatorname{ctg} \frac{6}{5}$; д) $\operatorname{ctg} \frac{23}{9} < \operatorname{ctg} \frac{23}{10}$; е) $\operatorname{ctg} \sqrt{2\pi} < \operatorname{ctg} \sqrt{\pi}$.
16. б) $2\pi n, n \in Z$; в) 2π .
17. б) $2\pi n, n \in Z$; в) 2π .
18. б) $\pi n, n \in Z$; в) π .

19. б) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$; в) π .

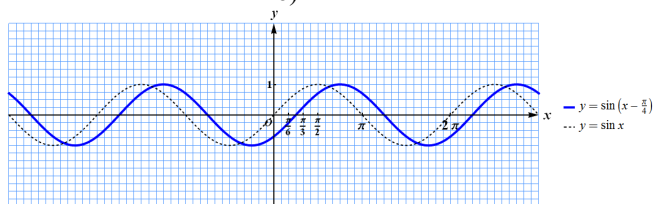
20.



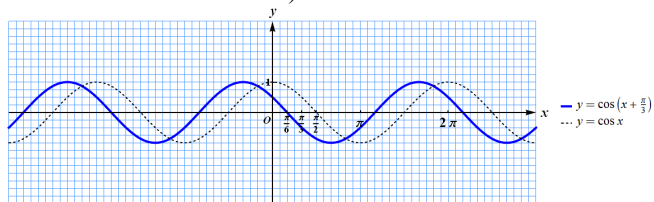
а)



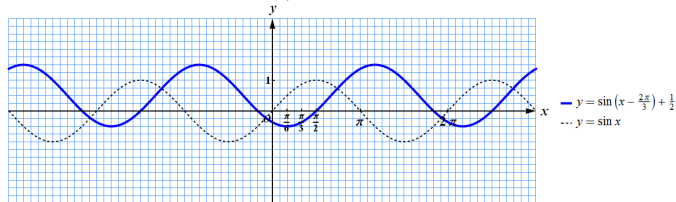
б)



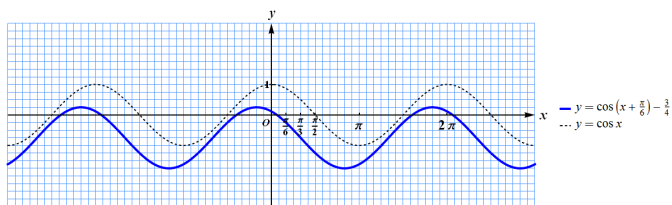
в)



г)

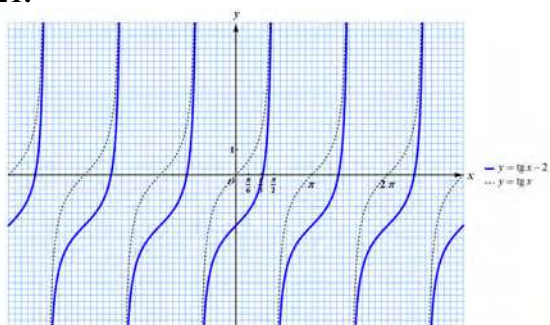


д)



e)

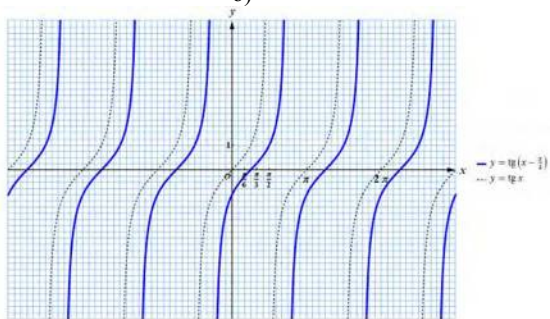
21.



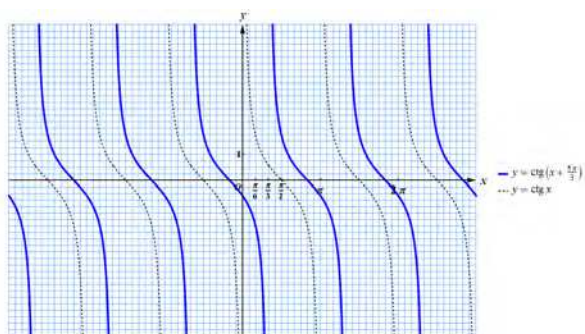
a)



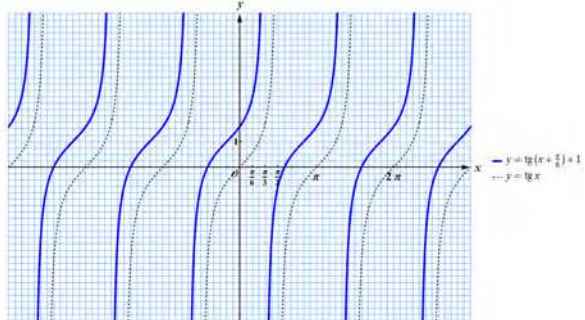
б)



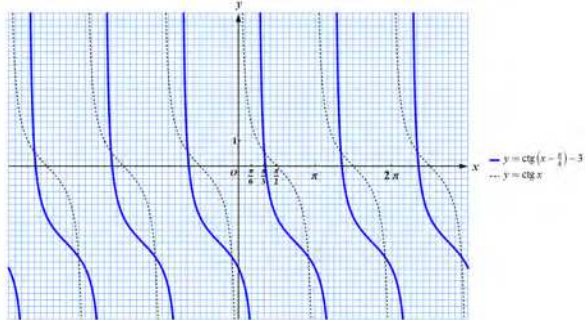
в)



Г)

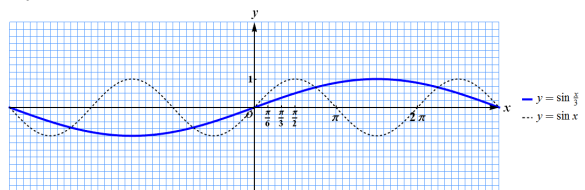


Д)

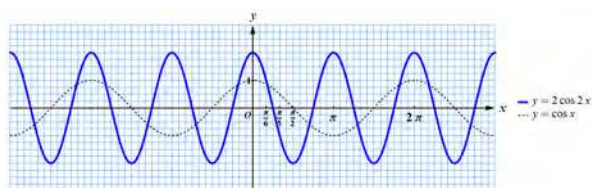


е)

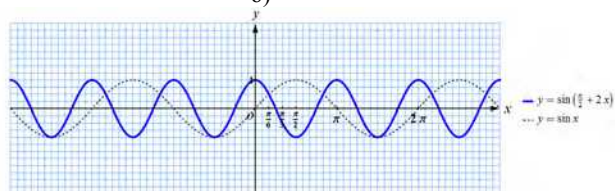
22.



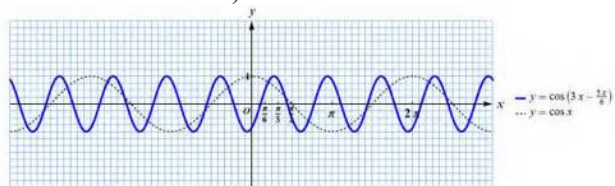
а)



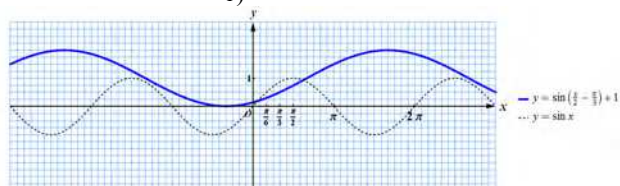
б)



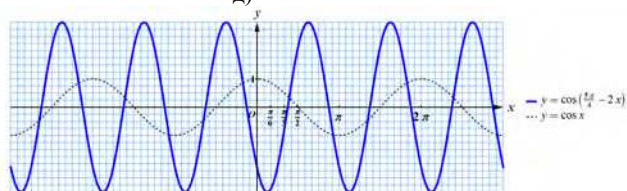
в)



г)

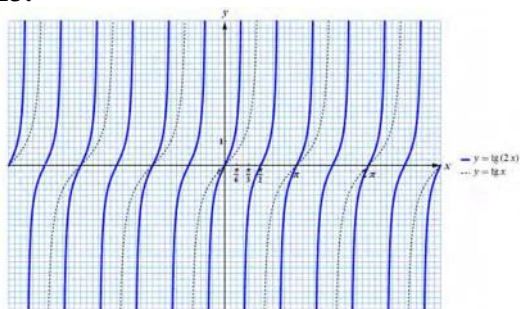


д)

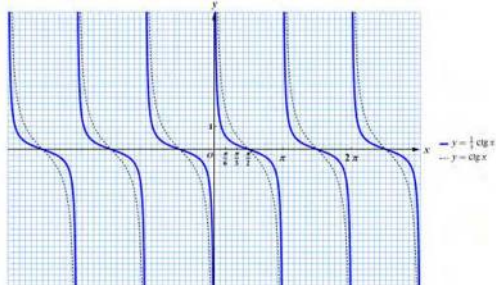


е)

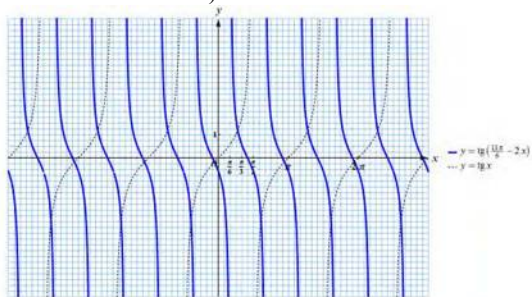
23.



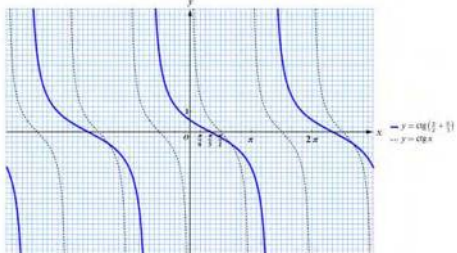
a)



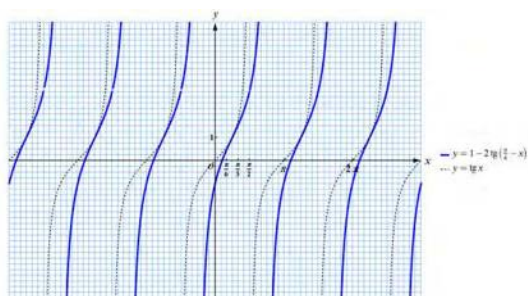
б)



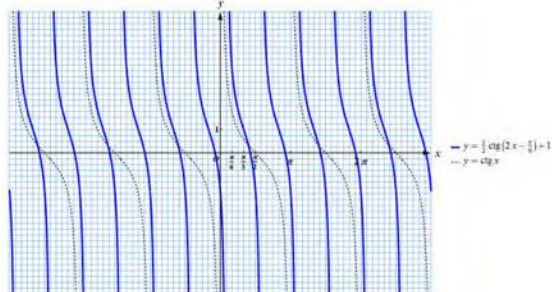
в)



г)

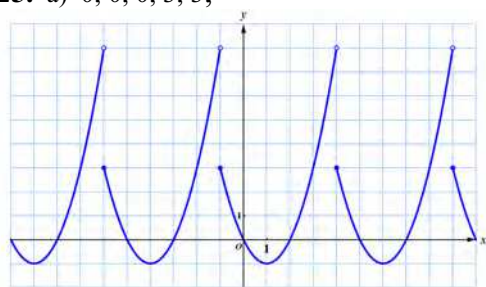


д)



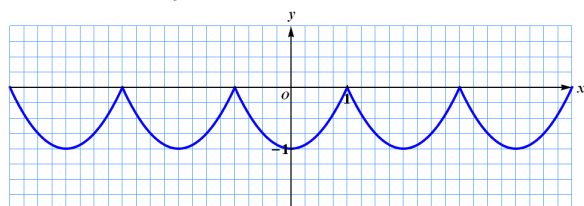
е)

25. а) 0; 0; 0; 3; 3;



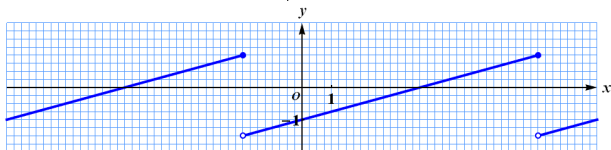
б)

26. а) $-\frac{3}{4}; 0; -\frac{8}{9}; -1; 8 - 4\sqrt{5};$



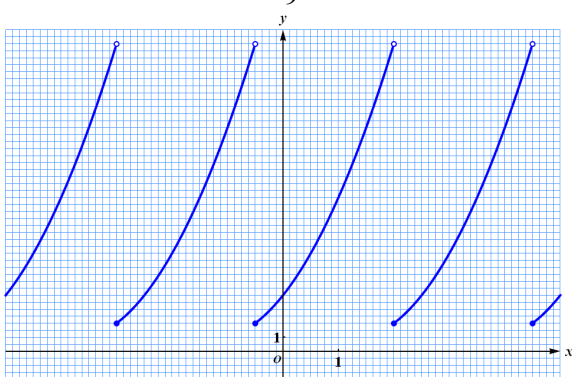
б)

27. a) $\frac{1}{4}; 1; -\frac{1}{4}; \frac{5}{16}; -\frac{7}{2} + \frac{5}{\sqrt{2}};$



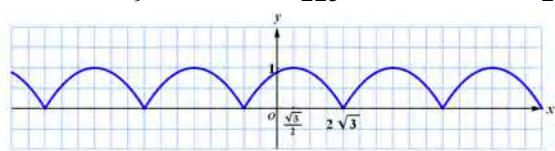
б)

28. a) $2; 16; 4; 35 - 15\sqrt{3}; \frac{128}{9};$



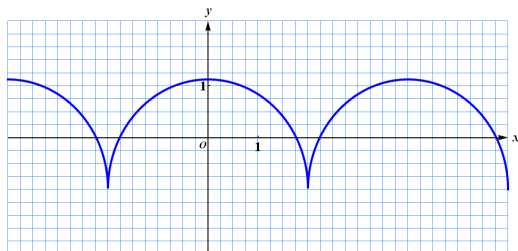
б)

29. a) $1; 0; \frac{20}{9}(17\sqrt{3} - 29); \frac{1}{225}(3770\sqrt{3} - 6523); \frac{80}{27}(57850\sqrt{3} - 100199);$

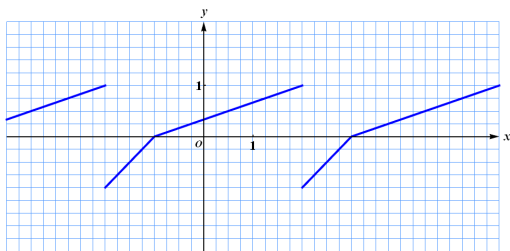


б)

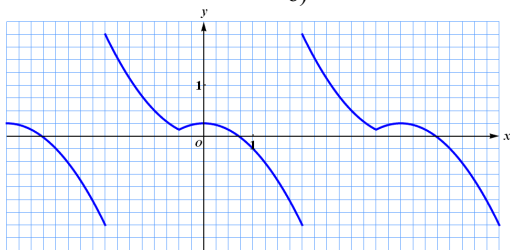
30.



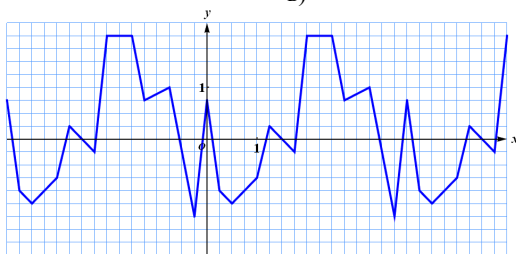
а)



б)

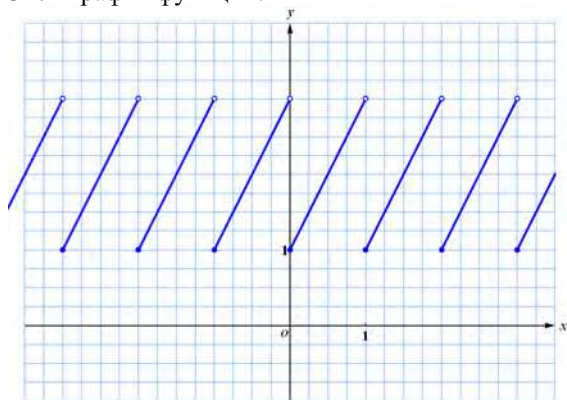


в)



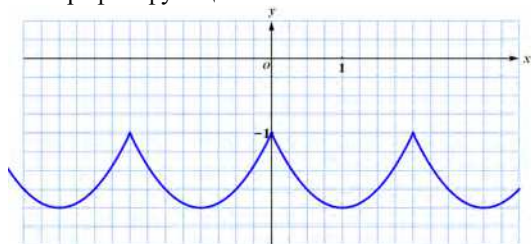
г)

32. График функции:



а) $2x+1$; б) $2x-9$; в) $2x-2n+1$, $n \in \mathbb{Z}$.

33. График функции:



а) $7 - 6x + x^2$; б) $23 + 10x + x^2$; в) $x^2 - 2(2n+1)x + 4n(n+1) - 1$.

34. а) Верно; б) те же, что и у функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, соответственно;

в) график функции $[\sin x]$

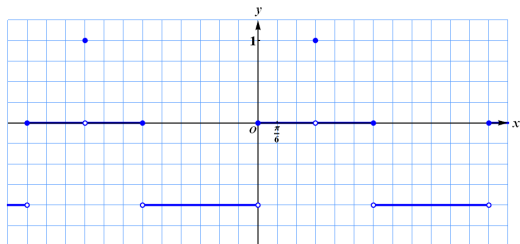


график функции $[\cos x]$

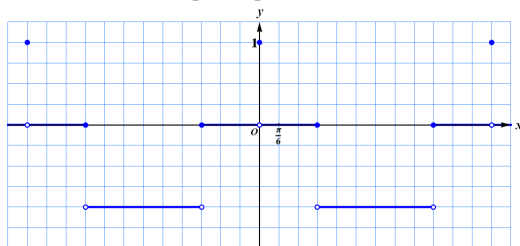
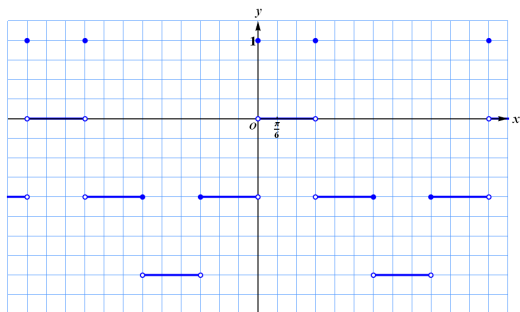


график функции $[\cos x] + [\sin x]$



К параграфу 1.11

4. а), г).

5. Например, $y = x$; $y = x \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$.

6. а) $y = \frac{x+6}{2}$; б) $y = 2 + \frac{1}{x}$; г) $y = \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}\sqrt{1+4x}$.

7. а), в), г).

8. а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $-\frac{\pi}{2}$; г) $-\frac{\pi}{4}$; д) $\frac{\pi}{4}$; е) 0.

9. а) $\frac{3\pi}{4}$; б) π ; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{5\pi}{6}$; д) $\frac{\pi}{2}$; е) $\frac{\pi}{4}$.

10. а) 0; б) $-\frac{\pi}{3}$; в) $-\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{4}$; д) $\frac{\pi}{3}$; е) $\frac{\pi}{6}$.

11. а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{3\pi}{4}$; д) $\frac{5\pi}{6}$; е) $\frac{\pi}{4}$.

12. а) π ; б) $\frac{5\pi}{12}$; в) $-\frac{5\pi}{6}$; г) $\frac{17\pi}{6}$.

13. а) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{5\pi}{6}$; б) 0; г) $\frac{\pi}{4}$.

14. а) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{1}{5}$; в) $\frac{7}{5\sqrt{2}}$; г) $\frac{11}{\sqrt{122}}$; д) $\frac{\sqrt{15}}{4}$; е) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

15. а) $-\frac{4}{\sqrt{17}}$; б) $-\frac{1}{15}$; в) $-\frac{\sqrt{91}}{3}$; г) $-\frac{\sqrt{19}}{9}$; д) $\frac{\sqrt{33}}{7}$; е) $-\frac{\pi}{\sqrt{16-\pi^2}}$.

16. а) $\frac{23}{25}$; б) $-\frac{24}{7}$; в) $\frac{40}{399}$; г) $-\frac{56\sqrt{2}}{17}$; д) $\frac{2\sqrt{26}}{27}$; е) $\frac{79}{20\sqrt{21}}$.

17. а) $\frac{7}{25}$; б) $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{7}{24}$; д) $-\frac{3\sqrt{11}}{50}$; е) $-\frac{4}{3}$.

18. а) $\frac{1+\sqrt{7}}{4}$; б) $5\sqrt{2}-7$; в) $\sqrt{\frac{3}{7}}$; г) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$; д) $\sqrt{\frac{5+\sqrt{3}}{10}}$; е) $\frac{1+\sqrt{17}}{4}$.

19. а) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{\frac{21-8\sqrt{5}}{11}}$; в) $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{101}}}$; г) $\sqrt{\frac{2}{5}}$; д) $-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$;

е) $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{5}{2\sqrt{29}}}$.

20. а) $\frac{7-4\sqrt{6}}{18}$; б) $-\frac{13}{5\sqrt{17}}$; в) $\frac{\sqrt{3131+310\sqrt{101}} - \sqrt{505-50\sqrt{101}}}{\sqrt{3131-310\sqrt{101}} + \sqrt{505+50\sqrt{101}}}$; г) $-\frac{4(36015+5746\sqrt{33})}{296903}$.

22. а) $\frac{1+(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}{x^3}$; б) $\frac{x(x^2-1+2\sqrt{1-x^2})}{1+x^2}$;

в) $\frac{-x^2 + (1+\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1+x^2}) + x(2+\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2})}{2\sqrt{2}\sqrt{(1+\sqrt{1-x^2})(1+x^2+\sqrt{1+x^2})}}$;

г) $\frac{x+2x\sqrt{1-x^2}-2x^3\sqrt{1-x^2}-4x^5\sqrt{1-x^2}}{1-4x^2+4x^6}$.

24. а) π ; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{5\pi}{4}$; г) 0.

К параграфу 1.12

4. а) $\sqrt{5} \sin\left(x - \arctg \frac{1}{2}\right)$; б) $5 \sin\left(x + \arctg \frac{3}{4}\right)$; в) $\sqrt{29} \sin\left(x + \arctg \frac{5}{2}\right)$;

г) $\sqrt{17} \sin\left[\frac{\pi}{2} + x + \arctg \frac{1}{4}\right]$.

5. а) $\sqrt{13} \cos\left(x - \arctg \frac{2}{3}\right)$; б) $2\sqrt{5} \cos\left(x - \arctg \frac{1}{2}\right)$; в) $10 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x + \arctg \frac{4}{3}\right)$;

г) $\sqrt{34} \cos\left(x + \arctg \frac{5}{3}\right)$.

8. а) Наибольшее $\sqrt{53}$, наименьшее $-\sqrt{53}$; б) наибольшее $\sqrt{73}$, наименьшее $-\sqrt{73}$; в) наибольшее 3, наименьшее -7 ; г) наибольшее $12 + \sqrt{65}$, наименьшее $12 - \sqrt{65}$.

9. а) $[-\sqrt{26}; \sqrt{26}]$; б) $[-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$; в) $[-3\sqrt{5}; -\sqrt{5}]$; г) $\left[\frac{\sqrt{13}}{3}; \frac{2\sqrt{13}}{3}\right]$.

10. График функции: а) $y = 5 \cos\left(x + \arctg \frac{4}{3}\right)$; б) $y = 13 \sin\left(x + \arctg \frac{5}{12}\right)$;

в) $y = 15 \cos \left(x + \arctg \frac{3}{4} \right)$; г) $y = 17 \sin \left(x + \arctg \frac{15}{8} \right)$.

11. График функции: а) $y = 4\sqrt{10} \sin(x + \arctg 3) + 3$; б) $y = 4 \sin(x + \arctg \sqrt{15}) - 2$;

в) $y = 3 \cos \left(x + \arctg \sqrt{\frac{7}{2}} \right) + 1$; г) $y = 3 - \sqrt{13} \sin \left(x - \arctg \frac{2}{3} \right)$.

12. График функции: а) $y = 5 \sin \left(2x + \arctg \frac{3}{4} \right)$; б) $y = \sqrt{29} \cos \left(3x - \arctg \frac{2}{5} \right)$;

в) $y = \sqrt{2} \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - 1$; г) $y = 5 \cos \left(3x - \arctg \frac{3}{4} \right) - 2$.

13. а) $-2 \cos x$; б) 0 ; в) $-\cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$; г) $2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$.

14. а) $-6 \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x + \frac{1}{2} \arctg \frac{2}{\sqrt{5}} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - x + \frac{1}{2} \arctg \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$;

б) $2\sqrt{13} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \arctg \frac{3}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{5x}{2} - \frac{1}{2} \arctg \frac{3}{2} \right)$;

в) $-4\sqrt{2} \sin \left(x - \frac{1}{2} \arctg \sqrt{\frac{5}{3}} \right) \sin \left(3x - \frac{1}{2} \arctg \sqrt{\frac{5}{3}} \right)$;

г) $20 \cos \left(\frac{15x}{2} - \frac{1}{2} \arctg \frac{3}{4} \right) \cos \left(\frac{5x}{2} + \frac{1}{2} \arctg \frac{3}{4} \right)$.

15. а) Наибольшее $1 + \frac{1}{2}\sqrt{29}$, наименьшее $1 - \frac{1}{2}\sqrt{29}$; б) наибольшее $3 + \sqrt{5}$,

наименьшее $3 - \sqrt{5}$; в) наибольшее $5 + \sqrt{17}$, наименьшее $5 - \sqrt{17}$;

г) наибольшее $2(1 + \sqrt{2})$, наименьшее $2(1 - \sqrt{2})$.

16. Вася не прав.

17. а) $\frac{1}{\sqrt{26}}$; б) $-\sqrt{2} \frac{\sin^2 \left(a - \frac{\pi}{4} \right)}{\sin \left(a + \frac{\pi}{4} \right)}$; в) $\frac{1}{2\sqrt{2} \sin \alpha}$; г) $2\sqrt{2}$.

К параграфу 2.1

2. а) $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{12}$; в) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{10}$; г) $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{4}$.

3. а) $\pm \frac{\pi}{2}$; б) π ; в) $\frac{\pi}{2}$; г) 0.

4. б) и в).

5.

Уравнение	$\cos x = 0$	$\cos x = 1$	$\cos x = -1$	$\operatorname{tg} x = 0$
Общее решение	$x = \pi/2 + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.	$x = 2\pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$	$x = \pi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$	$x = \pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$.
Уравнение	$\sin x = 0$	$\sin x = 1$	$\sin x = -1$	$\operatorname{ctg} x = 0$
Общее решение	$x = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.	$x = \pi/2 + 2\pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$.	$x = -\pi/2 + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.	$x = \pi/2 + \pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$.

6. а) πn , где $n \in \mathbb{Z}$; в) $x = \pi/2 + 2\pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$; д) $x = \pi/2 + \pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$;

б) $x = \pi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$; г) $x = \pi + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$; е) $x = \pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$.

7. а) б) в) например: $\sin 3x = 0$; г) $\sin \pi x = 0$.

10. а) все, кроме πk , $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $k, n \in \mathbb{Z}$; б) x – любое; в) нет корней; г) нет корней.

11. а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $n \in \mathbb{Z}$; б) πk , где $k \in \mathbb{Z}$.

К параграфу 2.2

2. а, в, д, е.

3. а, г, е, з.

4. а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{4\pi}{3}$; в) корней нет; г) $\frac{11\pi}{6}$.

5. а) $\frac{5\pi}{4}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{5\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{6}$.

6. а) $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in Z$; б) $(-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi k$, где $k \in Z$; в) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in Z$; г) $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi p$, где $p \in Z$; д) $\frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in Z$; е) $-\frac{\pi}{6} + \pi t$, где $t \in Z$; ж) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in Z$; з) $\frac{\pi}{6} + \pi l$, где $l \in Z$;

7. а) $(-1)^n \frac{\pi}{7} + \pi n$, где $n \in Z$; б) $\pm \frac{\pi}{10} + 2\pi n$, где $n \in Z$; в) $(-1)^n \frac{3\pi}{10} + \pi k$, где $k \in Z$; г) $\frac{2\pi}{3} + \pi l$, где $l \in Z$; д) $\frac{\pi}{12} + \pi n$, где $n \in Z$; е) $\frac{3\pi}{8} + \pi p$, где $p \in Z$.

8. а) $(-1)^n \arcsin 0,9 + \pi n$, где $n \in Z$; б) $\pm \arccos(-0,6) + 2\pi p$, где $p \in Z$;

в) $\arctg 2,5 + \pi l$, где $l \in Z$;

г) $\operatorname{arccctg} 1,6 + \pi l$, где $l \in Z$.

9. а) $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi n}{2}$, где $n \in Z$; б) $(-1)^{t+1} \frac{5\pi}{36} + \frac{5\pi t}{6}$, где $t \in Z$; в) $\pm \frac{\pi}{10} + \frac{6\pi s}{5}$, где $s \in Z$; г) $\pm \frac{9\pi}{2} + 12\pi p$, где $p \in Z$.

10. а) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi t$, где $t \in Z$; б) $-\frac{\pi}{18} + \frac{\pi t}{3}$, где $t \in Z$; в) $-\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}$, где $k \in Z$;

г) $\frac{\pi}{2} + 3\pi l$, где $l \in Z$.

11. а) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi t$, где $t \in Z$; б) $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi t$, где $t \in Z$; в) $(-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, где $k \in Z$;

г) $\pm \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi l}{3}$, где $l \in Z$.

12. а) $\frac{13\pi}{24} + \pi t$, $-\frac{7\pi}{24} + \pi t$, где $t \in Z$; б) $-\frac{3\pi}{10} + 4\pi k$, $\frac{27\pi}{10} + 4\pi k$, где $k \in Z$;

в) $\frac{2\pi}{3} + 4\pi t$, $4\pi t$, где $t \in Z$; г) $\frac{\pi}{8} + \pi m$, $-\frac{13\pi}{24} + \pi m$, где $m \in Z$.

13. а) $\frac{\pi n}{5}$, где $n \in Z$; б) $x = \frac{5\pi}{6} + 5\pi k$, где $k \in Z$; в) $\frac{11\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}$, где $k \in Z$;

г) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi t$, где $t \in Z$.

14. а) $\frac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}$, где $k \in \mathbb{Z}$; в) $x = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$;

г) $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

15. а) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi t$, где $t \in \mathbb{Z}$; б) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi p$, где $p \in \mathbb{Z}$; в) $\pm \frac{\pi}{4} + \pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$;

г) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi t$, где $t \in \mathbb{Z}$.

16. а) $\frac{\pi}{4} + \pi t$, где $t \in \mathbb{Z}$; б) $\pm \frac{\pi}{4} + \pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{4} + 2\pi t$, $\frac{7\pi}{4} + 2\pi t$, где $t \in \mathbb{Z}$;

г) $\frac{\pi}{4} + \pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$;

17. а) $\pi^2 t^2$, где $t \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$; б) $2\pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$, $s \geq 0$; в) $\frac{2}{1+2t}$, где $t \in \mathbb{Z}$;

г) $\pm \sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2\pi s}$, где $s \in \mathbb{Z}$, $s \geq 0$

18. а) $\frac{8}{(-1)^t + 4t}$, где $t \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{81}{((-1)^{p+1} + 3p)^2}$, где $p \in \mathbb{N}$; в) $\frac{3}{\pm 1 + 6t}$, где $t \in \mathbb{Z}$;

г) $\pm 3 \sqrt{\frac{2}{(-1)^{s+1} + 6s}}$ где $s \in \mathbb{N}$.

19. а) один; б) два; в) один; г) ни одного.

20. $x = \operatorname{arccotg} a + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$

К параграфу 2.3

2. а) $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) нет решений; в) $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right]$, где

$k \in \mathbb{Z}$; г) $\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$;

3. а) $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$; б) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi s; \operatorname{arctg} 5 + \pi s\right)$, где $s \in \mathbb{Z}$;

в) $\left[\frac{\pi}{3} + \pi p; \pi + \pi p\right)$, где $p \in \mathbb{Z}$; г) $\left(\pi s; \operatorname{arccotg} \frac{1}{3} + \pi s\right)$.

4. а) $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$; б) $\left[-\frac{4\pi}{3} + 4\pi s; \frac{4\pi}{3} + 4\pi s\right]$, где $s \in \mathbb{Z}$;
 в) $\left[-\frac{5\pi}{12} + \pi p; -\frac{\pi}{12} + \pi p\right]$, где $p \in \mathbb{Z}$; г) $(-\pi + 8\pi s; 5\pi + 8\pi s)$, где $s \in \mathbb{Z}$.
5. а) $\left(\pi s; \frac{\pi}{3} + \pi s\right)$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) $\left[3\pi s; \frac{\pi}{2} + 3\pi s\right]$, где $s \in \mathbb{Z}$; в) $\left(\frac{\pi k}{4}; \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}\right)$, где $s \in \mathbb{Z}$; г) $\left[-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right]$, где $s \in \mathbb{Z}$.
6. а) $\left[\frac{\pi}{4} + \pi s; \frac{3\pi}{4} + \pi s\right]$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) $\left(\frac{\pi}{6} + \pi s; \frac{5\pi}{6} + \pi s\right)$, где $s \in \mathbb{Z}$;
 в) $\left[-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi s}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi s}{2}\right]$, где $s \in \mathbb{Z}$; г) $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi p; \frac{4\pi}{3} + 2\pi p\right)$, где $p \in \mathbb{Z}$.
7. а) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi s; \frac{\pi}{4} + 2\pi s\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi s; \frac{5\pi}{6} + 2\pi s\right)$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) $\left(\frac{\pi}{4} + \pi k; \arctg 2 + \pi k\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$;
8. а) $\left[\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\right]$, где $k \in \mathbb{Z}$; б) $\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$.
9. а) $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$; б) $\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right)$, где $k \in \mathbb{Z}$.
10. а) $a > -\frac{1}{2}$; б) $a \leq 1$.
11. а) $a \geq 1$; б) $a < 0$; в) $a \geq \sqrt{2}$.
12. а) $a > 1$; б) $a \leq -1$; в) $a \geq \sqrt{2}$.

К параграфу 2.4

2. а) $\frac{\pi s}{2}$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) πk , $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}$; в) $-\frac{\pi}{4} + \pi t$, $2\pi t$, где $t \in \mathbb{Z}$;
 г) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi s$, πs , где $s \in \mathbb{Z}$; д) $\frac{\pi k}{2}$, $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$; е) $\frac{\pi}{4} + \pi t$, $\frac{3\pi}{4} + \pi t$, где $t \in \mathbb{Z}$.

3. а) $\frac{\pi}{2} + \pi s$, $2\pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) πk , $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{2} + \pi t$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi t}{2}$, где $t \in \mathbb{Z}$; г) $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi s$, πs , где $s \in \mathbb{Z}$; д) πk , где $k \in \mathbb{Z}$; е) $\frac{\pi t}{3}$, где $t \in \mathbb{Z}$.
4. а) $\frac{\pi}{4} + \pi s$, πs , где $s \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$; в) πt , где $t \in \mathbb{Z}$; г) $-\frac{\pi}{4} + \pi p$, где $p \in \mathbb{Z}$.
5. а) $\frac{\pi s}{2}$, $\frac{\pi s}{3}$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{2} + \pi t$, $\frac{\pi t}{4}$, где $t \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi s}{4}$, $\frac{\pi s}{5}$, где $s \in \mathbb{Z}$; д) $\frac{\pi k}{3}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}$; е) πt , $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi t}{4}$, где $t \in \mathbb{Z}$.
6. а) $2\pi s$, $\pm \frac{\pi}{9} + \frac{4\pi s}{9}$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi k}{3}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi t}{4}$, где $t \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi}{20} + \frac{\pi s}{10}$, $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi s}{3}$, где $s \in \mathbb{Z}$; д) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $s \in \mathbb{Z}$.
7. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi s$, $\frac{\pi}{4} + \pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{4} + \pi t$, где $t \in \mathbb{Z}$; г) $-\frac{\pi}{3} + \pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$.
8. а) $\frac{\pi}{2} + \pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, где $k \in \mathbb{Z}$; в) πt , где $t \in \mathbb{Z}$; г) πp , $\pm \frac{\pi}{6} + \pi p$, где $p \in \mathbb{Z}$.
9. а) $\frac{\pi}{2} + \pi s$, $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) πk , $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$; в) πt , $\pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi t$, где $t \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi s$, $(-1)^s \arcsin \frac{1}{3} + \pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$.
10. а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi s}{2}$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi k}{3}$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi s}{2}$, $\pm \frac{\pi}{6} + \pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi t}{2}$, $(-1)^t \frac{\pi}{12} + \frac{\pi t}{2}$, где $t \in \mathbb{Z}$.
11. а) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi t}{4}$, $\frac{\pi t}{2}$, где $t \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi s}{2}$, $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi s}{4}$, где $s \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi s}{5}$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$;

г) $\frac{\pi}{4} + \pi t, \frac{\pi}{36} + \frac{\pi t}{9}$, где $t \in \mathbb{Z}$.

12. а) $\pi s, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi k}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}$;

в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi t, \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi t}{5}$, где $t \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{2\pi}{27} + \frac{2\pi s}{9}, \frac{2\pi}{21} + \frac{2\pi s}{7}$, где $s \in \mathbb{Z}$.

13. а) $\frac{\pi s}{2}, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ где $k \in \mathbb{Z}$;

в) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi t}{4}, \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi t}{3}$, где $t \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi s}{2}, \pm \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi s}{3}$, где $s \in \mathbb{Z}$.

14. а) $\frac{\pi k}{5}$, где $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi p}{3}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi p}{2}$, где $p \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi t}{3}$, где $t \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi k}{5}$, где $k \in \mathbb{Z}$.

15. а) $\frac{\pi}{2} + \pi s; 2\pi s; \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi s}{5}$, где $s \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi t}{3}; \frac{\pi t}{4}$, где $t \in \mathbb{Z}$;

16. а) $\frac{\pi s}{5}, \frac{\pi s}{7}$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) $\pi k, \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, где $k \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi t}{8}$, где $t \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi s}{5}, \frac{\pi}{6} + \frac{\pi s}{3}$, где $s \in \mathbb{Z}$.

17. $-\pi, -\frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{6}$.

18. а) $\frac{\pi}{8}$ и $-\frac{\pi}{4}$; б) $-\frac{\pi}{8}$ и $\frac{3\pi}{8}$.

К параграфу 2.5

2. а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi s; (-1)^s \frac{\pi}{6} + \pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$;

в) $(-1)^s \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3} + \frac{\pi k}{2}$, где $k \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi t$, где $t \in \mathbb{Z}$.

3. а) $-\frac{\pi}{4} + \pi s; \arctg 4 + \pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) $-\arctg \frac{1}{2} + \pi t; \arctg 2 + \pi t$, где $t \in \mathbb{Z}$;

в) $\arctg(1 \pm \sqrt{2}) + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$; г) $\pm \frac{\pi}{4} + \pi m; \pm \arctg \sqrt{2} + \pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$.

4. а) $(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$; б) $\pi t, \pm \frac{\pi}{6} + \pi t$, где $t \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$;
 г) $\pm \arccos\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\pi m; 2\pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$.

5. а) $\frac{\pi}{4} + \pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; где $k \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{3} + \pi n$; где $n \in \mathbb{Z}$; г) $-\frac{\pi}{6} + \pi t$,
 где $t \in \mathbb{Z}$.

6. б) $-\frac{\pi}{4} + \pi s$, $\arctg 5 + \pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\arctg \frac{1}{3} + \pi n$; где $n \in \mathbb{Z}$.

7. а) $\pm \frac{\pi}{4} + \pi s$. где $s \in \mathbb{Z}$; б) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$; в) $-\frac{\pi}{4} + \pi t$, где $t \in \mathbb{Z}$; г) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi p$,
 где $p \in \mathbb{Z}$.

8. а) $\frac{\pi}{2} + \pi s$, $\frac{\pi}{4} + \pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) πn , $\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$; в) πt , $-\frac{\pi}{3} + \pi t$,
 где $t \in \mathbb{Z}$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi m$, $\arctg \frac{1}{\sqrt{2}} + \pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$.

9. а) $\frac{\pi}{4} + \pi m$, $-\arctg 4 + \pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$; б) $\arctg 2 + \pi n$, $-\arctg \frac{3}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$;
 в) $\frac{\pi}{4} + \pi s$; $\arctg \frac{3}{2} + \pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$; г) $-\arctg \sqrt{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

10. а) πs , где $s \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi t$, где $t \in \mathbb{Z}$; в) πs , где $s \in \mathbb{Z}$;
 г) $\frac{\pi}{2} + \pi t$, где $t \in \mathbb{Z}$.

11. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi s$, $2\pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$; в) $2\arctg \frac{1}{2} + 2\pi m$,
 где $m \in \mathbb{Z}$; г) $\pi + 2\pi t$, $\pi - 2\arctg \frac{3}{2} + 2\pi t$, где $t \in \mathbb{Z}$.

12. а) πs , где $s \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$; в) πk , $\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$;
 г) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

13. а) б) $\pm \frac{\pi}{4} + \pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$; в) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

14. а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$; в) πs , $\frac{\pi}{4} + \pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$;

г) $\frac{\pi}{4} + \pi m$, где $m \in \mathbb{Z}$.

15. а) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi t}{3}$, $\pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi t}{3}$, где $t \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$.

16. а) $a \geq -1$; б) $a \geq 2$; в) $3 \geq a \geq -1$; г) $-2 \leq a \leq 2$.

К параграфу 2.6

2. а) $\left(\frac{\pi}{4} + \pi s; \frac{\pi}{4} - \pi s\right)$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} - 2\pi n\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$;

в) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi t; \frac{\pi}{12} - 2\pi t\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi t; -\frac{7\pi}{12} - 2\pi t\right)$, где $t \in \mathbb{Z}$; г) $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}; -\frac{\pi m}{2}\right)$, где $m \in \mathbb{Z}$.

3. а) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi s; \frac{\pi}{12} - 2\pi s\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi s; -\frac{7\pi}{12} - 2\pi s\right)$, где $s \in \mathbb{Z}$;

б) $\left(\frac{5\pi}{12} + 2\pi s; -\frac{2\pi}{3} + 2\pi s\right)$, $\left(\frac{11\pi}{12} + 2\pi s; \frac{2\pi}{3} + 2\pi s\right)$, где $s \in \mathbb{Z}$; в) $\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{\pi s}{3}; -\frac{\pi}{36} - \frac{\pi s}{3}\right)$,

где $s \in \mathbb{Z}$; г) $\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{\pi s}{3}; -\frac{\pi}{9} + \frac{\pi s}{3}\right)$, где $s \in \mathbb{Z}$.

4. а) $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi s; 1\right)$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) $(0; \pi t)$, где $t \in \mathbb{Z}$; в) $(-\arctg 2 + \pi n; 1)$, где $n \in \mathbb{Z}$;

г) $\left(2 + \frac{\pi}{4} + \pi m; 2\right)$, где $t \in \mathbb{Z}$;

5. а) $\left(\frac{\pi(n+k)}{2}; \frac{\pi(n-k)}{2}\right)$, где $n, k \in \mathbb{Z}$; б) $(\pi(n+k); \pi(n-k))$, где $n, k \in \mathbb{Z}$;

в) $(\pi(n+k); \pi + \pi(n-k))$, где $n, k \in \mathbb{Z}$;

г) $\left(-\frac{5\pi}{12} + \pi(n+k); \frac{\pi}{12} + \pi(n-k)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{12} + \pi(n+k); \frac{5\pi}{12} + \pi(n-k)\right)$;

$\left(\frac{\pi}{12} + \pi(n+k); -\frac{5\pi}{12} + \pi(n-k)\right)$; $\left(\frac{5\pi}{12} + \pi(n-k); -\frac{\pi}{12} + \pi(n-k)\right)$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

6. а) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi t; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi t; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, где $t, k \in \mathbb{Z}$; б) $\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi t; \pi k\right)$, где $t, k \in \mathbb{Z}$;

7. а) $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi t; 2\pi k\right)$, где $t, k \in \mathbb{Z}$; б) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi t; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi t; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, где $t, k \in \mathbb{Z}$; в) $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi t; (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k\right)$, где $t, k \in \mathbb{Z}$; г) $\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi t; \pi + 2\pi k\right)$, где $t, k \in \mathbb{Z}$.

8. а) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi t; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi t; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)$, где $t, k \in \mathbb{Z}$;

б) $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi t; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, где $t, k \in \mathbb{Z}$.

9. а) $\left(\frac{5\pi}{6} + \pi t; \frac{\pi}{3} + 2\pi t\right)$, $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi t; -\frac{\pi}{3} + 2\pi t\right)$, где $t \in \mathbb{Z}$; б) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi s; \frac{\pi}{6} - 2\pi s\right)$, где $s \in \mathbb{Z}$; в) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi t; -\frac{\pi}{3} + 2\pi t\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi t; \frac{\pi}{3} + 2\pi t\right)$, где $t \in \mathbb{Z}$; г) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi m; \frac{\pi}{6} - 2\pi m\right)$, где $m \in \mathbb{Z}$.

10. а) $(2\pi t; \pi k)$, где $t, k \in \mathbb{Z}$;

б) $\left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$; $\left(\pi + 2\pi n, -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$; $\left(\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$; $\left(\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right)$, где $t, k \in \mathbb{Z}$.

11. а) $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi(n+k); -\frac{\pi}{6} + \pi(n-k)\right)$, $\left(\frac{\pi}{6} + \pi(n+k); \frac{\pi}{6} + \pi(n-k)\right)$, где $n, k \in \mathbb{Z}$;

б) $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi(n+k); -\frac{\pi}{6} + \pi(n-k)\right)$, $\left(\frac{\pi}{6} + \pi(n+k); \frac{\pi}{6} + \pi(n-k)\right)$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

12. а) $(2\pi n; \pi + 2\pi k)$, где $n, k \in \mathbb{Z}$; б) $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi t; \frac{\pi}{4} + 2\pi s\right)$, где $s, t \in \mathbb{Z}$

13. а) $(2\pi s; 2\pi n)$, где $s, n \in \mathbb{Z}$; б) $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi m; \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi m; \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$, где $m, n \in \mathbb{Z}$.

К параграфу 2.7

2. а) πt , где $t \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$; в) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi t$, где $t \in \mathbb{Z}$; г) корней нет.
3. а) $2\pi t$, где $t \in \mathbb{Z}$; б) корней нет; в) πt , где $t \in \mathbb{Z}$; г) корней нет.
4. а) πt , где $t \in \mathbb{Z}$; б) корней нет; в) $\frac{\pi}{2} + \pi t$, где $t \in \mathbb{Z}$; г) πt , где $t \in \mathbb{Z}$.
6. а) πt , где $t \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$.
7. а) $(2\pi s; -2\pi + 2\pi s)$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi s; \pi - 2\pi s\right)$, где $s \in \mathbb{Z}$.
8. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\pi + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbb{Z}$; г) $\pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.
9. а) 0; б) корней нет; в) -1 ; г) ± 1 .
10. а) корней нет; б) 0; $\pi + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.
11. а) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi s$, где $s \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.
12. $(-2; \pi s)$, $\left(2; \frac{\pi}{2} + \pi s\right)$, где $s \in \mathbb{Z}$.
13. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) корней нет.

К параграфу 3.1

2. а) 5; -3 и 1 ; б) 4; -4 и 2 ; в) 6; 0 и 3 ; г) 3; 8 и 2 .
3. а) 4 и -5 ; б) 6 и 11; в) -5 и 1 ; г) -2 и -1 .
4. а) $x^4 + x^3 - x^2 - x$; б) $5x^2 + 6x + 1$; в) $9x^4 - 4x^3 + x$;
г) $2x^5 - 5x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 3$.
6. а) -6 ; б) -12 ; в) 15; г) -8 .
7. а) $(x-1)(x-3)$; б) $x(x-1)^2$; в) $(x-2)(2x+1)$; г) $(x-2)(x-1)(x+1)$.
8. а) $a=0$, $b=4$ или $a=4$, $b=0$; б) $a=1$, $b=1$ или $a=2$, $b=\frac{1}{2}$;
в) $a=-3$, $b=2$ или $a=2$, $b=-3$; г) $a=1$, $b=2$ или $a=2$, $b=1$.

9. а) $(x+1)(x^2-x-1)$; б) $(x-1)(x^2+x+4)$; в) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$;
 г) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.

11. 2.

12. а) нет; б) да; в) нет; г) да.

13. а) $(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$;

б) $x^5+x+1=x^2(x^3-1)+x^2+x+1=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$.

К параграфу 3.2

2. а) $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$;

б) $a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$; в) $a^5-1=(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1)$;

г) $a^7+1=(a+1)(a^6-a^5+a^4-a^3+a^2-a+1)$.

3. а) $\frac{1}{a-b}$; б) $a+b$; в) $x+1$; г) $\frac{1}{x^3+2x^2+4x+8}$.

4. а) б) $(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$;

в) г) $(a \pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 \pm b^6$.

5. а) 10; б) 35; в) 1; г) 210; д) 6; е) 210.

6. а) $49-20\sqrt{6}$; б) $89-28\sqrt{10}$; в) $49+20\sqrt{6}$; г) $112+64\sqrt{3}$.

7. а) $8x^3+12x^2+6x+1$; б) $81x^4-216x^3+216x^2-96x+16$;

в) $x^8+4x^6+6x^4+4x^2+1$; г) $x^{10}-5x^9+10x^8-10x^7+5x^6-x^5$.

8. а) 15360; б) 216.

9. Да.

10. 4.

11. 66.

12. $-\frac{5120}{9}$.

13. $2^{10}-1, 2^n-1$.

К параграфу 3.3

2. Нет.

3. а) x^3-x^2-3x+1 ; б) $2x^4+x^3+3x^2+6x-14$.

4. а) $2x^3+3x^2=(x+1)(2x^2+x-1)+1$; б) $x^3-5x^2+7x-2=(x^2-3x+1)(x-2)-2$;

в) $x^2 - 1 = (x^2 + 1) \cdot 1 - 2$; г) $8x^2 + 4x = 0 \cdot x^3 + 8x^2 + 4x$.

5. а) $x - 1 + \frac{2}{x+1}$; б) $x^2 + x + 2 + \frac{3}{x-1}$; в) $x^2 + x + 1 + \frac{x+2}{x^2-1}$;

г) $x^2 - x + \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

7. а) $n = -7; -3; -1; 3$; б) $n = 0; -2; 2; 4$; в) $n = -2; 0$; г) $n = -6; 2; 4; 6; 12$.

8. а) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + x + 1)(x^4 + x) + 1$.

б) $x^7 - 1 = (x^3 - 1)(x^4 + x) + (x - 1)$

9. $p(x) = -2x + 1$

11. $a = 3, b = -4$.

К параграфу 3.4

2. а) -10 ; б) 7 ; в) 15 ; г) 0 .

5. $x^3 - x^2 - 4x + 4$

6. 13 .

7. 1 .

8. $x^3 - 3x^2 + 2x$.

9. $a = -3$ и $b = 2$

10. $A \cdot \frac{x-b}{a-b} + B \cdot \frac{x-a}{b-a}$.

11. а) 6 ; б) $6x$.

12. $x + 3$.

К параграфу 3.5

3. а) -2 ; б) $1, 2$ и 3 ; в) $-1, -3$ и -5 ; г) 3 .

4. а) -1 и $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $-2, 1$ и $-\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{2}$.

7. а) нет; б) нет.

8. а) -2 ; б) $-1, -3, 5$; в) 4 ; г) $-4, -3, 4$.

10. а) да; б) нет.

К параграфу 3.6

3. а) 83 ; б) 40 ; в) -79 ; г) 83 .

4. а) $7x^3 - x - 1 = (x-1)(7x^2 + 7x + 6) + 5$; б) $x^4 + x^2 - x = (x+2)(x^3 - 2x^2 + 5x - 11) + 22$;

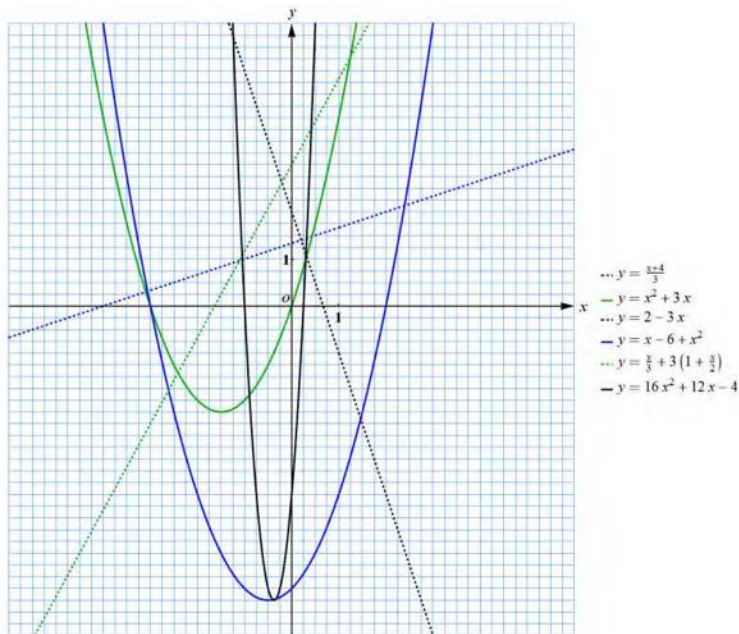
- в) $2x^4 - x^2 + 3x - 1 = (x+3)(2x^3 - 6x^2 + 17x - 48) + 143$;
 г) $-x^5 - x^2 + 5x - 4 = (x-3)(-x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 28x - 79) - 241$.
 5. а) $x^4 + 2x^2 - x + 2$; б) $2x^4 + 5x^3 - x^2 - 2x + 15$.
 7. а) -67 и $-12,25$; б) 4 и $9\frac{1}{3}$.
 8. $a = 8$.
 9. $a = 127$.

К параграфу 3.7

2. а) 0 и -2 ; б) $-1, 2$ и 3 ; в) 5 и $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$; г) $0, 4$ и 1 .
 3. а) $0, 1$ и -4 ; б) -1 ; в) 0 и 1 ; г) $-\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
 4. а) нет корней; б) ± 3 ; в) $\pm \sqrt{2}$; г) ± 1 ; ± 2 .
 5. а) 1 ; б) 2 ; в) 1 ; г) -1 и ± 2 .
 6. а) 0 и -2 ; б) $\frac{1}{2}$; в) 1 и $\sqrt[3]{6}$; г) $-\sqrt[5]{4}$ и $\sqrt[5]{2}$.
 7. а) -1 и $2 \pm \sqrt{3}$; б) -1 ; -2 и $-\frac{1}{2}$; в) $2 \pm \sqrt{3}$; г) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.
 8. а) $-1, \pm 2, 3$; б) $-6, -4; \pm 1$; в) 1 и -2 ; г) -3 и -2 .
 9. а) 3 ; б) ± 1 .
 10. а) ± 1 и 3 ; б) -3 и -2 ; в) 1 и -4 ; г) 2 и 9 .
 11. а) $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$; б) $-2 \pm \sqrt{5}$ и $\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$; в) $1; -2$ и 4 ; г) $6 \pm 2\sqrt{6}$.
 12. $x = \pm 1$
 14. а) -5 и -3 ; б) -2 и 0 ; в) $\frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$. Замена $x^2 - x = y$; г) $-\frac{1}{2}$.
 15. а) $-3 \pm \sqrt{6}, \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$; б) -1 и 9 ; $\frac{5 \pm \sqrt{61}}{2}$; в) $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$ и $\frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$;
 г) -1 ; 6 и $\frac{-9 \pm \sqrt{105}}{2}$.
 16. а) $\frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2}}{2}$; б) Указание. Сводится к предыдущему заменой $x = \frac{1}{y}$;
 в) нет корней.

К параграфу 4.1

4. а) $y; x$; б) $y; a$; в) $t; z$; г) $\beta; \alpha$; д) $q; p$; е) $n; v$.
 5. а) $v; u$; б) $t; y$; в) $w; r$; г) $k; m$; д) $c; m$; е) $y; x$.
 6. $s = 13t$. Независимая переменная t , зависимая s . $t \in [0; 3]$.
 7. $s = 20t$. Независимая переменная t , зависимая s . $t \in [0; +\infty)$.
 8. $R = 2 - 5t$. Независимая переменная t , зависимая R . $t \in \left[0; \frac{2}{5}\right]$.
 11. а) $3; 4; 5$; б) $-7; 11; 7$; в) $\frac{9}{37}; \frac{5}{12}; \frac{102}{109}$; г) $\frac{25}{28}$; не существует; $-\frac{50}{9}$.
 12. а) $\frac{11}{6}$; б) $\frac{26}{7}$; в) $\frac{29}{48}$; г) 0 ; д) $\frac{19}{2}$; е) $\frac{65}{252}$; ж) $\frac{62}{51}$; з) $\frac{1476}{737}$.
 13. а) 0 ; б) 2 ; в) 2 ; г) $\frac{125}{4}$; д) $-\frac{23}{20}$; е) $\frac{69}{80}$; ж) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; з) $\frac{206}{5}$.
 14. а) $x \in (-\infty; -6) \cup \left(-6; \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$; б) $x \in [1; +\infty)$;
 в) $x \in \left(-\infty; \frac{4}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$; г) $x \in \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$.
 15.



17. а) 2; 2; 3; 4; 2; б) -2; 2; 4,5; 5,5; 6,5 и 0; 7,9; в) -1; 0; 2; 3; 2,5; г) -2; 2; 4,5; 5,5; 6,5 и 0; 7,9.

18. а) 5; 5; 8; б) 7; 4,5; 1; 2; 6,25; 7,75; в) 9; г) 7; д) -2; е) 4,5.

19. $m = \frac{n(n-1)}{2}.$

20. а) $a(3-a)$; б) $(4-b)(b-1)$; в) $2t(3-2t)$; г) $\frac{6v-4}{v^2}$; д) $(1-x)(x+2)$;

е) $3\sqrt{r}-r.$

21. а) $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2+1} + \frac{1}{\alpha^2}$; б) $x + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}$; в) $\frac{-b^6+4b^4-7b^2+5}{b^4-3b^2+2}$; г) $\frac{(z^3+z)^2+1}{z^4+z^2}$;

д) $\frac{z^{12}+4z^8+32z^4+64}{4z^8+16z^4}$; е) $\frac{1}{w^2(w+1)^2} \left(w^4(w+1)^4 - \frac{1}{w^2(w+1)^2+1} + 2 \right).$

22. а) $x=0$; $x=-3$; г) $x \in (-1; 7)$; д) $x \in (-7; -1).$

23. а) 240 км; б) $\frac{2}{3}$ ч; в) грузовой через 5 ч, легковой через $3\frac{2}{3}$ ч; г) грузовой со

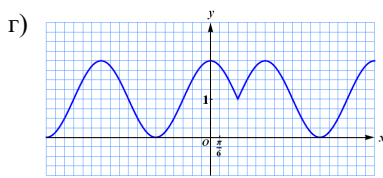
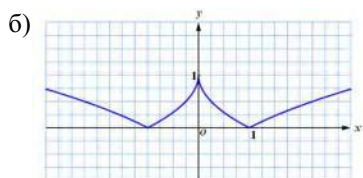
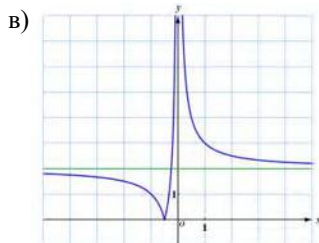
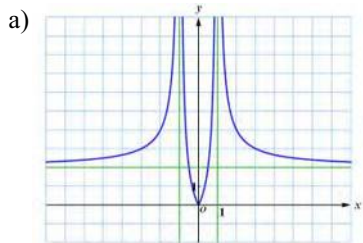
скоростью 48 км/ч, легковой $\frac{720}{11} \approx 65, (45)$ км/ч; д) $1\frac{2}{3}$ ч; е) 80 км; ж) $1\frac{1}{3}$ ч.

24. а) 9 км; 9 км; 10,5 км; б) 15 с; в) 720 км/ч; г) 216 км/ч; д) 30 с; е) 30 с; ж) 3 мин.

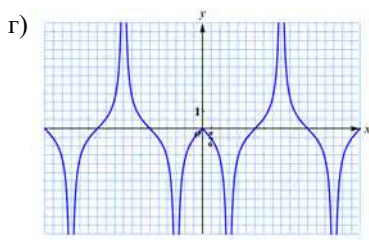
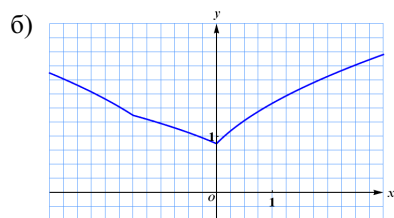
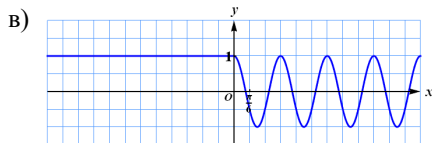
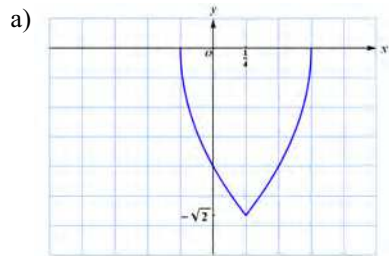
25. а) Нет; б) если любая прямая, параллельная оси Oy пересекает кривую не более чем в одной точке.

К параграфу 4.2

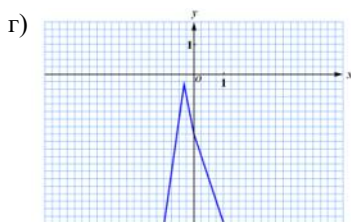
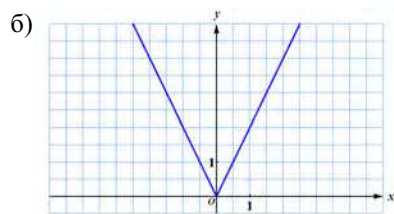
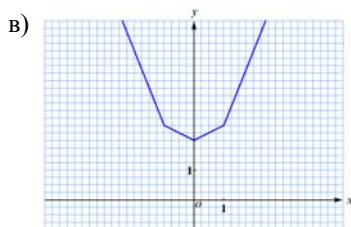
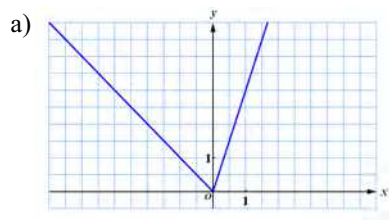
19.



20.



21.



К параграфу 4.3

1. $\frac{x+1}{x-1} \rightarrow 1$ при $x \rightarrow +\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$.
2. Нет.
3. 2000.

4. а) $\frac{5}{2}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $-\frac{3}{2}$ г) $\frac{1}{4}$.

5. Неверно.

7. б) $y = 2$; в) 11; 101; 1001.

8. б) $y = -\frac{1}{3}$; в) 2; 15; 111.

9. б) $y = 2$; в) 39602; 3996002; 399960002.

10. б) $y = -\frac{5}{2}$; в) 8; 140; 552.

11. б) $y = 3$; в) 5; 15; 45; 142.

12. б) $y = \frac{1}{2}$; в) 8; 85; 850.

13. а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 4,5$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ не существует, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1,5$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ не существуют; г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ не существуют.

14. а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 6$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -2$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$ и $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ не существуют; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 3,5$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ не существует; г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1$.

17. а) $\frac{2}{3}$; б) -6 ; в) 1; г) $\frac{1}{2}$.

К параграфу 4.4

1. $\frac{x^2-1}{x+1} \rightarrow -2$ при $x \rightarrow -1$ слева и справа. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1} = -2$.

2. $U_{\frac{1}{\sqrt{10}}}^0(2)$.

4. а) $2a-3b$; б) $\frac{a+2b}{3a-b}, a \neq \frac{b}{3}$; в) $\frac{a+b}{ab}$; г) $\frac{2b(b-1)}{a(2a+1)}, a \neq -\frac{1}{2}, a \neq 0$.

5. Верно.

6. $\lim_{x \rightarrow -3} h(x) = a$.

7. б).

9. б) $U_{\frac{1}{11}}^0(2); U_{\frac{2}{101}}^0(2); U_{\frac{2}{1001}}^0(2)$.

10. б) $U_{\frac{5}{96}}^0\left(\frac{1}{3}\right); U_{\frac{5}{906}}^0\left(\frac{1}{3}\right); U_{\frac{5}{9006}}^0\left(\frac{1}{3}\right).$

11. б) $U_{\frac{79}{400}}^0(4); U_{\frac{799}{40000}}^0(4); U_{\frac{7999}{4000000}}^0(4).$

12. а) -1 ; б) 4 ; в) 20 ; г) -3 ; д) 1 ; е) 9 .

13. а) 5 ; б) 2 ; в) 0 ; г) $\frac{1}{5}$; д) $-\frac{5}{3}$; е) $\frac{2001}{10}$.

14. а) $\frac{2}{5}$; б) $\frac{4}{3}$; в) $\frac{5}{2}$; г) $\frac{5}{4}$; д) $\frac{1}{4}$; е) $-\frac{1}{3}$.

15. а) 1 ; б) 1 ; в) 2 .

16. а) -1 ; б) -3 ; в) 0 ; г) $-\frac{3}{4}$; д) $-\frac{1}{3}$; е) 0 .

17. а) $\lim_{x \rightarrow 2} y = 2,5$; $\lim_{x \rightarrow -3} y = 2,5$; б) оба предела не существуют;

в) $\lim_{x \rightarrow 2} y$ не существует, $\lim_{x \rightarrow -3} y = 4$; г) оба предела не существуют.

18. а) $\lim_{x \rightarrow 0} y = \frac{3}{5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} y$ не существует; в) $\lim_{x \rightarrow 0} y$ не существует;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} y$ не существует.

К параграфу 4.5

2. а) 72 ; б) 32 ; в) 2390 ; г) $\frac{283}{8}$.

3. Имеет.

4. $+$.

5. Область определения $2 \leq x \leq 10$, область значений $-17 \leq y \leq 33$.

8. а) $4; -2; 8; -6$; б) $\frac{5}{6}; -\frac{1}{2}; \frac{131}{132}; -\frac{109}{110}$; в) $32; -22; -33; 43$; г) $\frac{\sqrt{39}}{10} - \frac{\sqrt{319}}{10};$
 $-\frac{\sqrt{319}}{10} + \frac{\sqrt{399}}{10}; \frac{3\sqrt{7}}{4} - \frac{\sqrt{55}}{4}; \frac{\sqrt{15}}{4} - \frac{\sqrt{55}}{4}.$

9. а) $-5\Delta x$; б) $4\Delta x$; в) $\Delta x(\Delta x + 2x_0)$; г) $-\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$; д) $2\Delta x(\Delta x + 2x_0)$;

е) $\Delta x(5 + \Delta x + 2x_0).$

11. а) Да; б) да; в) нет; г) да; д) да; е) да.

14. а) Непрерывна в $-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{7}{10}$, не непрерывна в точках $-1; 1$; б) непрерывна в $-\frac{9}{5}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1$, не непрерывна в точке -1 ; в) непрерывна в $\frac{1}{5}; \frac{3}{2}$, не непрерывна в точках $-1; -\frac{3}{5}; 1$; г) непрерывна в $\frac{4}{5}; \frac{3}{2}$, не непрерывна в точках $-\frac{8}{5}; -\frac{2}{5}; \frac{1}{5}$.

16. а) Не может; б) не может; в) может.

19. Верно.

20. Верно.

21. Верно.

24. $x = \frac{175}{256}$.

К параграфу 4.6

2. а) $5; 5; 5; 5$; б) $13; 4; \frac{7}{2}; \frac{31}{10}; \frac{301}{100}$.

3. а) $\frac{1}{50}; \frac{201}{50}; \frac{401}{50}; \frac{2001}{50}$; б) $\frac{1}{11}; \frac{7}{12}; \frac{179}{259}; \frac{16}{21}$.

5. а) $(-1; 1)$; б) $(0, 7; -0, 9)$; в) $(-0, 5; -0, 6)$; $(1, 5; 1, 5)$; г) $(-1, 7; 1, 6)$; $(-1, 6; 0, 7)$; $(-1, 1; 1, 3)$; $(-0, 9; -0, 3)$; $(0, 1; -1, 4)$; $(0, 8; -0, 7)$; $(1; -0, 9)$.

6. Уравнение касательной $y = 0$.

7. Уравнение касательной $y = 2 - x$.

9. а) Приращения функции: при $x_0 = 0$: $-1; 3$; при $x_0 = 3$: $5; -3$; отношение приращения функции к приращению аргумента: при $x_0 = 0$: $-1; -3$; при $x_0 = 3$: $1 - \sqrt{5} + \sqrt{6}; 1 - \sqrt{5}$;

б) приращения функции: при $x_0 = 2$: $-1 + \sqrt{5}; -3 + \sqrt{3}$; при $x_0 = 3$: $5; -3$; отношение приращения функции к приращению аргумента: при $x_0 = 2$: $-1 + \sqrt{5}; 3 - \sqrt{3}$; при $x_0 = 3$: $1 - \sqrt{5} + \sqrt{6}; -1 + \sqrt{5}$;

в) приращения функции: при $x_0 = -5$: $0; 0$; при $x_0 = 5$: $0; 0$; отношение приращения функции к приращению аргумента: при $x_0 = -5$: $0; 0$; при $x_0 = 5$: $0; 0$;

г) приращения функции: при $x_0 = 0, 5$: $\frac{1}{6}; -\frac{1}{2}$; при $x_0 = 2, 5$: $\frac{1}{20}; -\frac{1}{12}$; отношение

приращения функции к приращению аргумента: при $x_0 = 0,5$: $\frac{1}{6}; \frac{1}{2}$; при $x_0 = 2,5$:

$$\frac{1}{20}; \frac{1}{12}.$$

10. а) Приращения функции: при $x_0 = -10$: $\frac{20311}{10100}; -\frac{19711}{9900}$; при $x_0 = 10$:

$$-\frac{19691}{9900}; \frac{20291}{10100}; \text{ отношение приращения функции к приращению аргумента: при}$$

$$x_0 = -10: -\frac{20311}{1010}; -\frac{19711}{990}; \text{ при } x_0 = 10: \frac{19691}{990}, \frac{20291}{1010};$$

б) приращения функции: при $x_0 = 0,3$: $\frac{281}{1000}; -\frac{263}{1000}$; при $x_0 = 0,8$: $\frac{131}{1000}; -\frac{83}{1000}$;

отношение приращения функции к приращению аргумента: при $x_0 = 0,3$:

$$-\frac{281}{100}; -\frac{263}{100}; \text{ при } x_0 = 0,8: -\frac{131}{100}; -\frac{83}{100};$$

в) приращения функции: при $x_0 = 3,9$: $2\sqrt{\frac{6}{5}} + \sqrt{\frac{19}{5}} - \sqrt{\frac{39}{10}} - \frac{7}{\sqrt{10}}; 2 - \sqrt{\frac{39}{10}} + \sqrt{5} - \frac{7}{\sqrt{10}}$;

$$\text{при } x_0 = 16,1: 4 - 3\sqrt{\frac{19}{10}} - \sqrt{\frac{161}{10}} + \sqrt{17}; -\frac{-18 + 3\sqrt{38} - 2\sqrt{86} + \sqrt{322}}{2\sqrt{5}};$$

отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\text{при } x_0 = 3,9: 7\sqrt{10} - 4\sqrt{30} - 2\sqrt{95} + \sqrt{390}; 20 + 10\sqrt{5} - 7\sqrt{10} - \sqrt{390};$$

$$\text{при } x_0 = 16,1: -40 - 10\sqrt{17} + 3\sqrt{190} + \sqrt{1610}; -\sqrt{5}(-18 + 3\sqrt{38} - 2\sqrt{86} + \sqrt{322});$$

г) приращения функции: при $x_0 = \frac{1}{2}$: $\frac{\sqrt{5}-1}{8}; \frac{1-\sqrt{5}}{8}$;

$$\text{при } x_0 = 1: \frac{4 - \sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{8}; \frac{4 - \sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{8}; \text{ отношение приращения функции к}$$

$$\text{приращению аргумента: при } x_0 = \frac{1}{2}: \frac{5}{4}(1-\sqrt{5}); \frac{5}{4}(1-\sqrt{5});$$

$$\text{при } x_0 = 1: -\frac{5}{4}\left(4 - \sqrt{2(5+\sqrt{5})}\right); \frac{5}{4}\left(4 - \sqrt{2(5+\sqrt{5})}\right).$$

11. а) $-2\Delta x$; б) $(2x_0 + 2 + \Delta x)\Delta x$; в) $2\sin \Delta x \cos(2x_0 + \Delta x)$; г) $4(2x_0 - 1 + \Delta x)\Delta x$;

$$\text{д) } 2\Delta x + \frac{3}{\Delta x + x_0} - \frac{3}{x_0}; \text{ е) } -\frac{2\Delta x}{(x_0 - 1)(x_0 - 1 + \Delta x)}.$$

12. а) 2; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{3}{2}$; г) $\frac{19}{6}$.

13. а) 0; б) $-\frac{23}{121}$; в) $\frac{5}{4}$; г) $-\frac{1}{2}$.

14. а) 1; б) 3; в) $\frac{1}{3}$.

15. Касательные существуют в точках: а) $-1; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}$; б) $-\frac{3}{2}; -1; \frac{7}{10}; \frac{6}{5}; \frac{17}{10}$;

в) $-\frac{9}{5}; -\frac{2}{5}; \frac{7}{10}$; г) $-\frac{3}{2}; -\frac{7}{10}; 1; \frac{3}{2}$.

16. а) $3x^2$; б) $-\frac{2}{x^3}$; в) $-\sin x$.

17. а) $\frac{1}{4}$; б) 11; в) $\frac{26}{25}$; г) 1.

19. а) $2\cos 2x$; б) $-\frac{1}{2(\sqrt{x})^3}$; в) $-\frac{1}{2}\sin \frac{x}{2}$.

20. а) $\frac{1}{\cos^2 x}$; б) $-\frac{1}{\sin^2 x}$; в) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

К параграфу 4.7

1. а) $2x + \frac{1}{\sqrt{x}}$; б) $\cos x - \sin x$; в) $4x^3 + 6x$; г) $2 + \cos x$; д) $\operatorname{tg}^2 x$; е) $2 + 4x^3$.

2. а) $6 - 3x^2$; б) $\frac{2}{\cos^2 x} + 3\sin x$; в) $-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$; г) $2 + \sin x$; д) $x + \frac{6}{x^4}$;

е) $\cos x - \frac{2}{\cos^2 x}$.

3. а) $2x \sin x + x^2 \cos x$; б) $2(x+1)$; в) $-\frac{\operatorname{tg} x}{x^2} + \frac{1}{x \cos^2 x}$; г) $2 \cos x - (2x+1) \sin x$;

д) $\frac{\sqrt{x}}{\cos^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x + 1}{2\sqrt{x}}$; е) $-\frac{x-2}{x^2} + \frac{1}{x}$.

4. а) $\frac{3x^2-1}{2(\sqrt{x})^3}$; б) $\frac{4}{(2x+1)^2}$; в) $-\frac{\cos x + (x+1)\sin x}{(x+1)^2}$; г) $\frac{\sin x - x \cos x}{(x + \sin x)^2}$;

$$\text{д) } \frac{(6x^2-1)\sin x \cos x - (2x^3-x)}{\sin^2 x}; \text{ е) } \frac{3+(8-3x)x}{(1+x^2)^2}.$$

$$\text{5. а) } -2x \sin x^2; \text{ б) } \frac{2}{\cos^2(2x-3)}; \text{ в) } 4(x+3)^3; \text{ г) } -\frac{6}{(2x-1)^4};$$

$$\text{д) } -\left(2x+\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)\sin(x^2+x\sqrt{x}); \text{ е) } \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

$$\text{6. а) } -\frac{2\cos x(2(x-1)\sin x+\cos x)}{(x-1)^2}; \text{ б) } \frac{1}{(x+1)^2 \cos^2\left(\frac{x}{x+1}\right)};$$

$$\text{в) } 12x^2 - \frac{3\cos x + x \sin x}{x^4} - \frac{3}{\sqrt{2x}}; \text{ г) } 28x^3 + 4(x+1)^3; \text{ д) } \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cos(x+\sqrt{x});$$

$$\text{е) } \frac{\cos x \sin 2x - 2 \sin x \cos 2x - 2}{\sin^2 2x}.$$

$$\text{8. а) } 3; \frac{35}{16}; -\frac{5}{4}; \text{ б) } 0; -4; 4; \text{ в) } \frac{1}{6}; \frac{\sqrt{3}-1}{12}; \frac{1+\sqrt{3}}{12}; \text{ г) } 1; 0; 0.$$

$$\text{9. а) } -1-\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}; \text{ б) } -1; 7; \text{ в) } x=\pi+2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \text{ г) } -4; 4.$$

$$\text{10. а) } x \in (1; +\infty); \text{ б) } x \in (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty); \text{ в) } x \in (2-\sqrt{5}; 2+\sqrt{5});$$

$$\text{г) } x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right).$$

$$\text{11. а), в).}$$

$$\text{12. а) } \frac{4}{(x-1)^3}; \text{ б) } 2-4\sin 2x; \text{ в) } \frac{2}{x^3} + \frac{x(3+2x^2)}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3};$$

$$\text{г) } 2-96x^2+240x^3-180x^4+42x^5.$$

$$\text{13. а) } 6+240x^2+960x^3-\frac{24}{x^5}; \text{ в) } -\frac{444}{(2x+3)^4}.$$

$$\text{15. } x < -1.$$

$$\text{16. а) } -\frac{2(14x^2+x-5)}{(3x^2-2x+1)^2}; \text{ б) } \frac{2(5x^2-8x-59)}{(x^2+6x+7)^2}; \text{ в) } \frac{3(x^2+24x-9)}{2(x^2-x-3)^2}; \text{ г) } -\frac{153x^2+256x+8}{(9x^2-9x-8)^2}.$$

$$17. \text{ а) } \frac{1}{2\sqrt{\frac{x+7}{x+8}}(x+8)^2} \cos\left(\sqrt{\frac{x+7}{x+8}}\right); \text{ б) } -\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{x+3})^3 \sqrt{4x+6}} \sin\left(\frac{\sqrt{4x+6}}{\sqrt{3x+9}}\right);$$

$$\text{в) } \frac{3}{(3x+4)^2 \sqrt{\frac{6x+4}{9x+12}} \cos^2\left(\sqrt{\frac{9x+6}{6x+8}}\right)}; \text{ г) } -\frac{5}{2\sqrt{x}(\sqrt{4x+5})^3 \sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4x+5}}\right)}.$$

$$18. \text{ а) } (x-3)^2(x+1)(6x^2+5x-9); \text{ б) } 2(x-3)(x^2-1)^3(5x^2-12x-1);$$

$$\text{в) } x^2(x-1)(12x^2+7x-9); \text{ г) } (x^4-1)(9x^4-1).$$

К параграфу 5.1

$$2. \text{ а) } \frac{3}{10}; \text{ б) } -\frac{11}{20}; \text{ в) } \frac{9}{10}; \text{ г) } -\frac{9}{20}.$$

$$3. 6.$$

$$4. -8; -3; 0; 6; 8$$

$$5. (-1; 0), \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right).$$

$$6. \left(-\frac{8}{5}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

$$7. \text{ а) } \frac{9}{4}; 2; \text{ б) } 0; -\frac{3}{2}; \text{ в) } 1 - \frac{2\pi}{3}; \frac{8\pi^2}{9}; \text{ г) } 0; -\frac{13}{8\sqrt{2}}.$$

$$8. \left(1 - \frac{\sqrt{3+\sqrt{3}}}{3}; 17 + \frac{1}{9}\sqrt{9 + \frac{1}{\sqrt{3}}}\right), \left(1 + \frac{\sqrt{3+\sqrt{3}}}{3}; 17 - \frac{1}{9}\sqrt{9 + \frac{1}{\sqrt{3}}}\right).$$

$$9. \left(-1 + \sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$10. \text{ а) } \text{Такого момента нет}; \text{ б) } 0; 1; 4.$$

$$11. \text{ а) } y = \left(\frac{33}{2(2-3x_0)^2} - \frac{1}{2x_0^2}\right)x + \frac{4-x_0(3x_0(3x_0+4)+5)}{x_0(2-3x_0)^2};$$

$$6) \quad y = \left(\frac{1}{2\sqrt{x_0}} - \frac{1}{x_0^2 \sqrt{\frac{x_0+2}{x_0}}} + 1 \right) x + \frac{x_0+3}{x_0 \sqrt{\frac{x_0+2}{x_0}}} + \frac{\sqrt{x_0}}{2};$$

$$в) \quad y = (x_0+1)(2x_0-1)(2x_0+1)(5x_0-1)x - 2x_0^2(x_0+1)(2x_0-1)(4x_0+1);$$

$$г) \quad f(x) = \frac{2((\cos x_0 + 4)\cos^2 x_0 - \sin x_0 - 2)}{(\cos x_0 + 2)^2} x + \\ + \frac{4x_0 + \cos x_0(\cos x_0(1 - 8x_0 - 2x_0 \cos x_0) + 2) + 2 \sin x_0(x_0 + \cos x_0(\cos x_0 + 2))}{(\cos x_0 + 2)^2}.$$

$$12. \text{ а) } y = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) x + \frac{1}{144} (77 + 6\sqrt{2}); \text{ б) } y = \frac{2}{49} x + \frac{50}{49}; \text{ в) } y = \frac{\sqrt{6}-6}{4} x + 2\sqrt{6};$$

$$г) \quad y = 8x + 29.$$

13. Они прошли одинаковое расстояние в моменты времени $t=0$ с и $t=1+\sqrt{5}$ с. Первой пройдет 30 м точка x_1 , 150 м — x_2 . Они двигались с одинаковой скоростью в момент времени $t=2$ с, с одинаковым ускорением — $t=\frac{2}{3}$ с.

14. Они прошли одинаковое расстояние в моменты времени $t=0$ с и $t=\frac{5}{3}$ с. Они двигались с одинаковой скоростью в момент времени $t=\frac{1}{2}$ с, с одинаковым ускорением — $t=\frac{1}{8} \left(\frac{7}{\sqrt[3]{3}} + 7\sqrt[3]{3} - 3 \right) \approx 1,494$ с.

$$15. \quad x_0 = \frac{1}{3} \left(\frac{c-b}{a-d} - \frac{\sqrt{(b-c)(3a+b-c-3d)}}{|a-d|} \right).$$

$$16. \quad k = 4 \pm 2\sqrt{10}, \left(\pm\sqrt{10}; -18 \pm 4\sqrt{10} \right).$$

$$17. \quad k = -\frac{245}{9}, \left(\frac{2}{7}; -\frac{16}{3} \right) \text{ или } k = -\frac{5}{9}, \left(2; \frac{4}{3} \right).$$

$$18. \quad b = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} - \sqrt{2} \right).$$

19. $k = -\frac{13}{36}, \left(2; \frac{5}{6}\right).$

20. Возрастающая, если $a \neq 0$ и $ea > bf$, убывающая, если $a \neq 0$ и $ea < bf$.

К параграфу 5.2

3. а)* Максимум: $(-1; 2)$, минимум $(1; -2)$; б) максимум: $(1; 2, 2)$, минимум отсутствует; в) максимум: $(-2; 2, 6)$, минимум $(2; -2)$; г) максимум отсутствует, минимум $(1; -2)$.

4. а) $(-1; -2)$; $(0; -1)$; $(1; -2)$; б) $\left(-\frac{1}{5}; -\frac{6}{5}\right)$; $\left(\frac{1}{5}; 1\right)$; в) $x \in \left(-\frac{7}{5}; -1\right)$, $y = -\frac{14}{5}$ или $x \in \left(-1; -\frac{3}{5}\right)$, $y = -\frac{9}{5}$ или $x \in \left(-\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$, $y = -\frac{4}{5}$ или $x \in \left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right)$, $y = \frac{1}{5}$ или $x \in \left(\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$, $y = \frac{6}{5}$ или $x \in \left(\frac{3}{5}; 1\right)$, $y = \frac{11}{5}$; г) $\left(-\frac{14}{5}; -\frac{14}{5}\right)$, $\left(-\frac{13}{5}; \frac{13}{5}\right)$, $\left(-\frac{12}{5}; -\frac{12}{5}\right)$, $\left(-\frac{11}{5}; \frac{11}{5}\right)$, $(-2, -2)$, $\left(-\frac{9}{5}; \frac{9}{5}\right)$, $\left(-\frac{8}{5}; -\frac{8}{5}\right)$, $\left(-\frac{7}{5}; \frac{7}{5}\right)$, $\left(-\frac{6}{5}; -\frac{6}{5}\right)$, $\left(\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right)$, $\left(\frac{7}{5}; -\frac{7}{5}\right)$, $\left(\frac{8}{5}; \frac{8}{5}\right)$, $\left(\frac{9}{5}; -\frac{9}{5}\right)$, $(2, 2)$, $\left(\frac{11}{5}; -\frac{11}{5}\right)$, $\left(\frac{12}{5}; \frac{12}{5}\right)$, $\left(\frac{13}{5}; -\frac{13}{5}\right)$, $\left(\frac{14}{5}; \frac{14}{5}\right)$.

5. а) Максимум при $x = -5,5$ и $x = 6$, минимум при $x = 2,5$;

б) максимум при $x = -5,5$, $x = 2$ и $x = 7,5$, минимум при $x = -8,5$, $x = -3$ и $x = 4,5$;

в) максимум при $x = -9$ и $x = 2,5$, минимум при $x = -4,5$ и $x = 8,5$;

г) максимум при $x = -4$ и $x = 7,5$, минимум при $x = -9$ и $x = 4,5$.

6. а) Возрастает при $x \in (-5, 5; 2)$, убывает при $x \in (-10; -5, 5) \cup (2; 10)$;

б) возрастает при $x \in (-10; -8, 5) \cup (-6; -1, 5) \cup (2, 5; 7)$, убывает при $x \in (-8, 5; -6) \cup (-1, 5; 2, 5) \cup (7; 10)$;

в) возрастает при $x \in (-9; -1, 25) \cup (2, 5; 10)$, убывает при $x \in (-10; -9) \cup (-1, 25; 2, 5)$;

г) возрастает при $x \in (-10; -8, 5) \cup (5, 5; 10)$, убывает при $x \in (-8, 5; 5, 5)$;

* В ответах для краткости мы часто будем писать фразы типа «максимум $(-1; 2)$ », имея в виду, что точка максимума равна -1 , а максимум равен 2 .

7. $-7; -2,75; 2,5; 7,5$.

8. $-6; 3; 7$.

9. $-9,25; -7; 4,5; 8,5$.

10. а) $-\frac{4}{3}; 0$; б) $\frac{1}{3}$; в) $-3; 2$; г) $-4; 0$.

11. а) Отсутствуют; б) максимум $(4 - 3\sqrt{2}; 17 - 12\sqrt{2})$, минимум $(4 + 3\sqrt{2}, 17 + 12\sqrt{2})$; в) максимум $(-\frac{7}{4}; 0)$, минимум $(-\frac{7}{12}; -\frac{343}{36})$; г) максимум $(-\frac{11}{3}; \frac{400}{27})$, минимум $(1; -36)$.

12. а) Максимум $(2 - 2\sqrt{2}; -\sqrt{2} - \frac{1}{2})$, минимум $(2 + 2\sqrt{2}; \sqrt{2} - \frac{1}{2})$;

б) максимум $(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2})$, минимум $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{2})$; в) максимум $(\frac{\sqrt{97}-7}{8}; \frac{27}{131072}(72235 + 11931\sqrt{97}))$, минимум $(1; 0)$ и $(-\frac{7+\sqrt{97}}{8}; \frac{27}{131072}(72235 - 11931\sqrt{97}))$; г) максимума нет, минимум $(12; \frac{7}{2})$.

13. а) $x \in (\frac{1-\sqrt{3}}{4}; \frac{1+\sqrt{3}}{4}) \cup (\frac{3}{2}; +\infty)$; б) $x \in (-\sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}) \cup (2 - \sqrt{2}; \sqrt{2})$;

в) $x \in (0; \frac{1}{99})$; г) $x \in (\frac{1}{10}; +\infty)$.

14. а) $\frac{6 \pm \sqrt{6}}{6}$; б) $-12; -4$; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $-3; 1$.

16. $a \geq 0$.

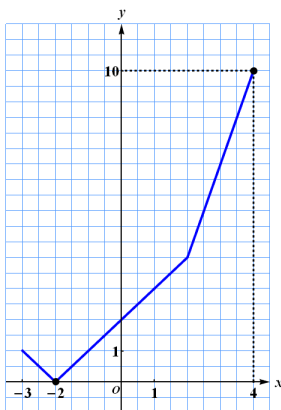
18. $a \in (-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty)$.

21. Максимум $(-1; 4\sin 1 + 10)$, минимум $(1; 4\cos 1 - 10)$.

К параграфу 5.3

4. $x = 2$.

5.



6. а) Наибольшее $\left(10; \frac{97}{15}\right)$, наименьшее $\left(-10; -\frac{103}{15}\right)$; б) наибольшее $(-10; 57)$, наименьшее $(10; -43)$; в) наибольшее $\left(10; 2(5\sqrt{2} + \sqrt{3})\right)$, наименьшее $\left(-10; 2(\sqrt{3} - 5\sqrt{2})\right)$; г) наибольшее $\left(-10; \frac{181}{4}\right)$, наименьшее $\left(10; -\frac{179}{4}\right)$.

8. а) Наибольшее $(-2; 11)$, наименьшее $(1; 2)$; б) наибольшее $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{4}\right)$, наименьшее $(-2; -11)$; в) наибольшее $\left(-\frac{1}{3}; \frac{19}{18}\right)$, наименьшее $\left(2; -\frac{5}{3}\right)$; г) наибольшее $\left(2; \frac{28}{3}\right)$, наименьшее $\left(-2; -\frac{8}{3}\right)$.

9. а) Наибольшее $\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$, наименьшее $(\sqrt{2} - 1; 2\sqrt{2} - 1)$; б) наибольшее $\left(\frac{1}{4}; -\frac{5}{4}\right)$, наименьшее $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{7}{2}\right)$; в) наибольшее $\left(4 - \sqrt{\frac{3}{2}}; 8 - 2\sqrt{6}\right)$, наименьшее $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{3}\right)$; г) наибольшее отсутствует, наименьшее $\left(-\frac{1}{2}; \frac{19}{30}\right)$.

11. 25 и 25.

12. $2\sqrt{5}$ и $2\sqrt{5}$.

13. а) Наибольшее $\left(\frac{2}{3}(5-\sqrt{10}); \frac{8}{27}(4\sqrt{10}-5)\right)$, наименьшее отсутствует;
 б) наибольшее $\left(\frac{1}{3}(8-\sqrt{13}); \frac{2}{27}(13\sqrt{13}-35)\right)$, наименьшее $(0; -10)$; в) наибольшее $(0; 10)$, наименьшее отсутствует; г) наибольшее отсутствует, наименьшее $(\sqrt{5}; 0)$.
14. а) Наибольшее $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$, наименьшее $\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; б) наибольшее $\left(\frac{\pi}{9}; 2\right)$, наименьшее $\left(\frac{4\pi}{9}; -2\right)$; в) наибольшее $\left(\frac{\pi}{4}; \sqrt{2}\right)$, наименьшее $\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$;
 г) наибольшее $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)$, наименьшее $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)$.

15.

Максимум	Минимум	Условие
$(0; c)$	$(-1; a+c)$ или $(1; a+c)$	$b=0$ и $a < 0$
$(-1; a+c)$ или $(1; a+c)$	$(0; c)$	$b=0$ и $a > 0$
$(-1; a-b+c)$	$(1; a+b+c)$	$b < 0$ и $\frac{b}{2} < a \leq -\frac{b}{2}$
$(-1; a-b+c)$	$\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$	$a > 0$ и $-2a < b < 0$
$(1; a+b+c)$	$(-1; a-b+c)$	$b > 0$ и $-\frac{b}{2} < a < \frac{b}{2}$
$(1; a+b+c)$	$\left(-1; c - \frac{b}{2}\right)$	$b > 0$ и $a = \frac{b}{2}$
$(1; a+b+c)$	$\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$	$a > 0$ и $0 < b < 2a$
$\left(1; c - \frac{b^2}{4a}\right)$	$(-1; a-b+c)$	$b > 0$ и $a = -\frac{b}{2}$
$\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$	$(-1; a-b+c)$	$a < 0$ и $0 < b < -2a$
$\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$	$(1; a+b+c)$	$a < 0$ и $2a \leq b < 0$

16. Максимальное $\frac{3-2\sqrt{3}\pi}{12}$ при $x = -\frac{\pi}{3}$, минимальное $-\frac{1+\sqrt{3}\pi}{2}$ при $x = -\pi$.

17. Максимальное $\frac{7498}{343}$ при $x = \frac{1}{7}$, минимальное $4\sqrt{2(\sqrt{2}+1)}$ при $x = \sqrt{\sqrt{2}-1}$.

18. Максимального значения нет, минимальное $2\sqrt{2}-3$ при $x = \sqrt{2}-2$.

19. $r = \frac{15}{4+\pi} \approx 2.100372$ м.

21. Максимальное $\frac{1}{14}$, минимальное 0.

К параграфу 5.4

6. а) $+\infty$; б) $+\infty$; в) $-\infty$; г) $+\infty$.

7. а) 7; б) -2; в) -2; г) 0.

8. а) $+\infty$; б) $+\infty$; в) $\frac{7}{6}$; г) $\frac{3}{5}$.

9. а) 1; б) 1; в) 1; г) 1.

10. а) $+\infty$; б) 0; в) $-\infty$; г) 0.

11. а) 1; б) 1; в) $+\infty$; г) $+\infty$.

12. а) $-\infty$; б) 1; в) 0; г) 1.

13. а) Любое натуральное число или 0; б) 0; 1; 2; г) 0; 1; 2.

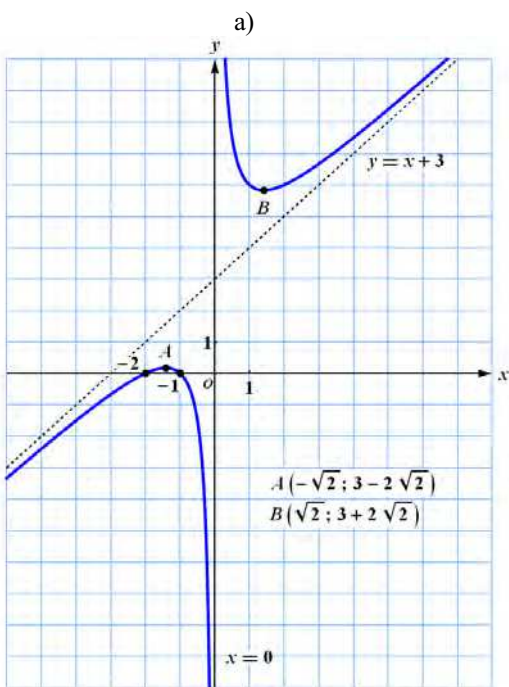
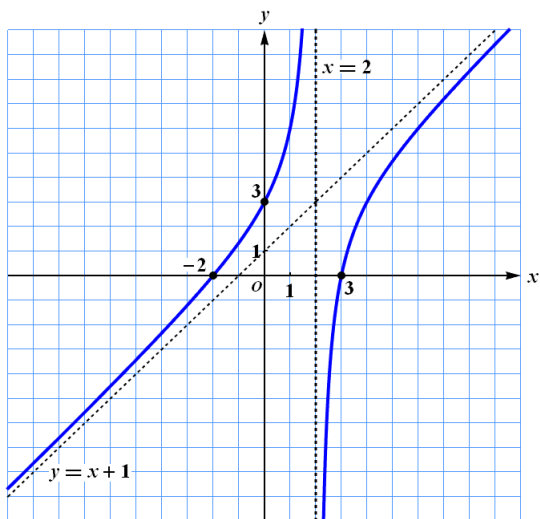
14. а) $x = -\frac{1}{3}$; б) $x = -3$; в) $x = 1$; г) $x = -\frac{3}{4}$.

15. а) $y = 0$; б) $y = \frac{10}{7}$; в) $y = \frac{4}{5}$; г) нет.

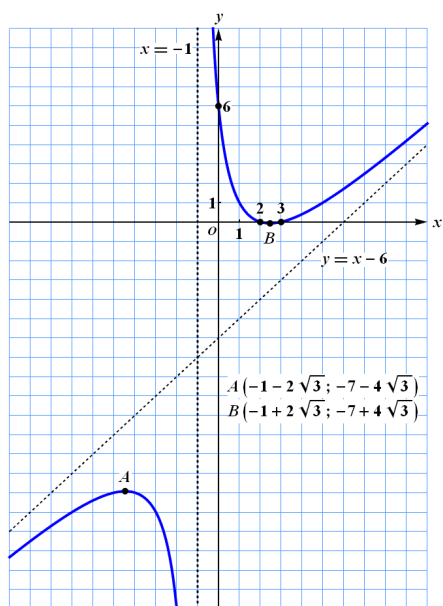
16. а) $y = 9x + 51$; б) $y = \frac{2}{7}x - \frac{33}{49}$; в) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{13}{16}$; г) $y = \frac{1}{6}x + \frac{5}{6}$.

17. а) Вертикальных и горизонтальных нет, наклонная $y = x - 3$; б) вертикальные $x = 0$ и $x = 1$, горизонтальных нет, наклонная $y = x + 5$; в) вертикальная $x = 0$, горизонтальных нет, наклонная $y = x + 1$; г) вертикальная $x = -3$, горизонтальных нет, наклонная $y = x - 6$.

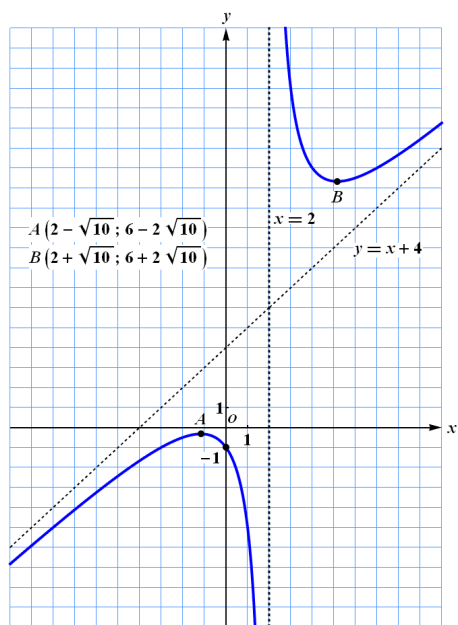
18.



б)

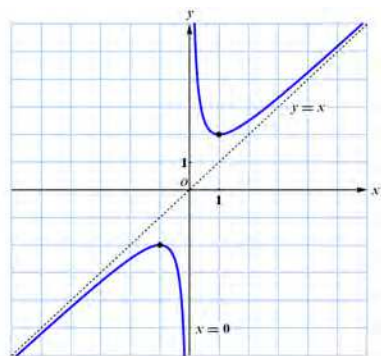


B)



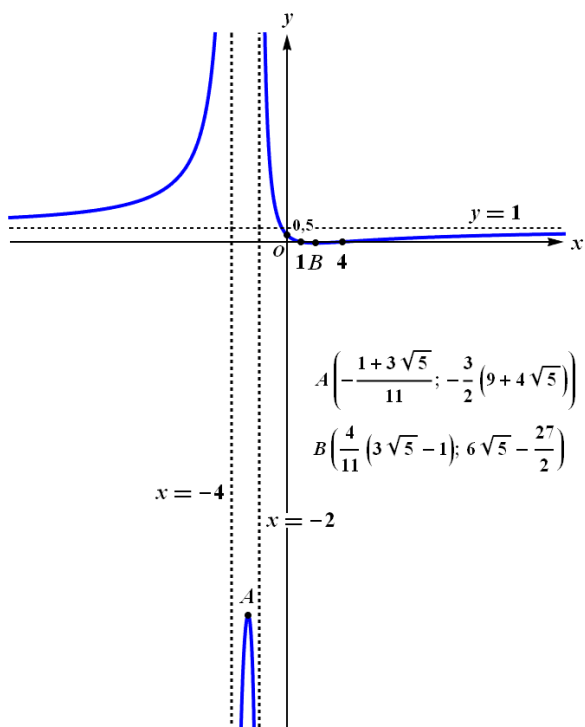
Г)

20.

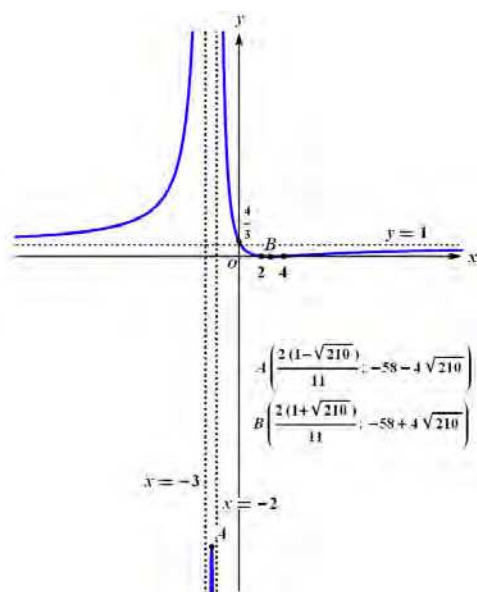


23. а) Да, да; б) да, да; в) нет, нет, нет, да; г) да, да; д) нет, да, нет, да.

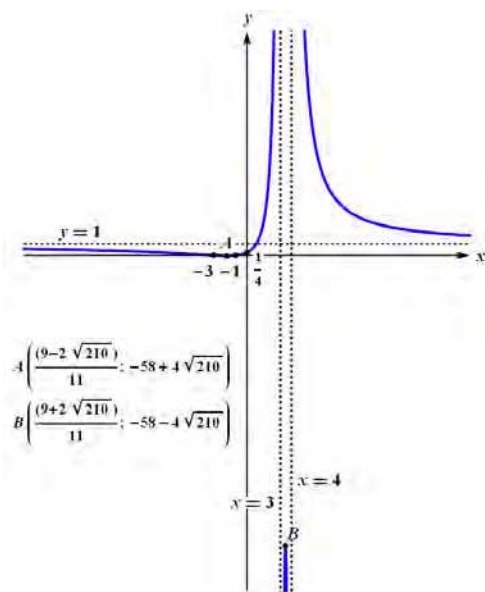
24.



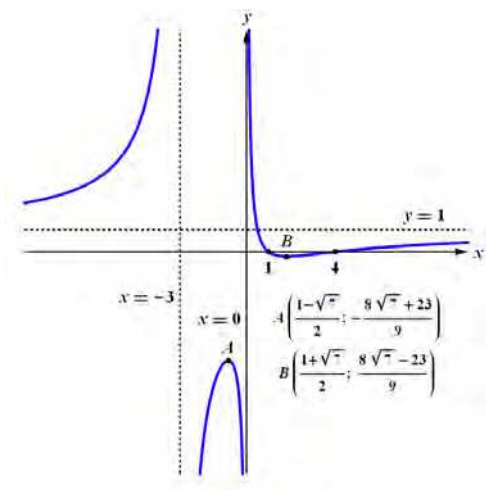
а)



6)



B)



г)

К параграфу 5.5

4. б) Может; в) любое натуральное число или 0.

6. а) Может. Скажем, график функции $y = \frac{1}{x^2}$; б) Может. Скажем, график функции

$$y = (1 - |x|)^3.$$

7. а) $(-5; 2)$; $(-2; 5)$; $(4; 5)$; б) $(-7; 0)$; $(-4; -3)$; $(-2; -5)$; $(4; -5)$; $(6; -3)$.

8. а) Точки перегиба $x = -8$, $x = -4$, $x = 3$, $x = 8$, функция выпукла вниз при $x \in (-10; -8) \cup (-4; 3) \cup (8; 10)$, вверх при $x \in (-8; -4) \cup (3; 8)$; б) точки перегиба $x = -7$, $x = -4$, $x = -1$, $x = 5$, функция выпукла вниз при $x \in (-10; -7) \cup (-4; -1) \cup (5; 10)$, вверх при $x \in (-7; -4) \cup (-1; 5)$; в) точки перегиба $x = -8$, $x = -4$, $x = 3$, $x = 7$, функция выпукла вниз при $x \in (-8; -4) \cup (-1; 3) \cup (7; 10)$, вверх при $x \in (-10; -8) \cup (-4; -1) \cup (3; 7)$; г) точки перегиба $x = -7$, $x = 4$, функция выпукла вниз при $x \in (-7; 4)$, вверх при точки перегиба $x = -8$, $x = -4$, $x = 3$, $x = 7$, функция выпукла вниз при $x \in (-8; -4) \cup (-1; 3) \cup (7; 10)$, вверх при $x \in (-10; -7) \cup (4; 10)$.

9. а) $\frac{8}{(1+x)^3}$; б) $\frac{8}{(1-2x)^3}$; в) $\frac{1}{(1-x)^3}$; г) $\frac{10}{(3-5x)^3}$.

10. а) $\frac{68}{(4+3x)^3}$; б) $-\frac{4}{3x^3}$; в) $\frac{322}{(5x-2)^3}$; г) $\frac{2}{(2x-3)^3}$.

11. а) $6\cos 3x - 9x \sin 3x$; б) $2 + \frac{2}{(x-1)^3}$; в) $-2(\cos x + \cos 2x)$; г) $\frac{38+6x(6+x)}{(x-1)^6}$.

12. $t = \sqrt{\frac{37}{3}}$ с.

13. $t = \frac{4}{3}$ с.

14. $a = 10$.

15. 26 м/с^2 .

16. а) Функция всюду выпукла вниз; б) функция выпукла вниз при $x \in (0; +\infty)$ и вверх при $x \in (-\infty; 0)$; в) функция выпукла вниз при $x \in (0; +\infty)$ и вверх при $x \in (-\infty; 0)$; г) функция выпукла вниз при $x \in (0; +\infty)$ и вверх при $x \in (-\infty; 0)$.

17. а) $(-1; 7)$ – максимум; $(2; -20)$ – минимум; б) $(-1; 12)$ – максимум; $\left(\frac{11}{6}; -\frac{3617}{108}\right)$ – минимум;

в) $\left(\frac{1}{3}; -\frac{613}{54}\right)$ – максимум; $\left(-\frac{3}{8}; -\frac{1635}{128}\right)$ – минимум;

г) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ – максимум; $\left(\frac{1}{6}; -\frac{59}{54}\right)$ – минимум.

18. а) $(-2; -4)$ – максимум; $(2; 4)$ – минимум; б) $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ – максимум; $\left(-3; -\frac{1}{2}\right)$ –

минимум; в) $(1; -1)$ – максимум; $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ – минимум; г) $\left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}}; 2\right)$ – максимум;

$\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}; 2 + 4\sqrt{6}\right)$ – минимум.

19. а) Функция выпукла вниз при $x \in (-\pi + 2\pi n; 2\pi n), n \in \mathbb{N}$, вверх при $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in \mathbb{N}$; б) функция выпукла вниз при

$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{N}$, вверх при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{N}$; в) и г)

функция выпукла вниз при $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{N}$, вверх при

$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right), k \in \mathbb{N}$.

20. а) $x = \pi n, n \in \mathbb{N}$; б) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{N}$; в) $x = \pi n, n \in \mathbb{N}$; г) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{N}$.

21. а) Функция выпукла вниз при $x \in (1; +\infty)$, вверх при $x \in (-\infty; 1)$, точка перегиба $x = 1$; б) функция выпукла вниз при $x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$, вверх при $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, точка перегиба $x = -\frac{1}{2}$; в) функция выпукла вниз при $x \in (-2; +\infty)$, вверх при $x \in (-\infty; -2)$, точка перегиба $x = -2$; г) функция выпукла вниз при $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$, вверх при $x \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$, точка перегиба $x = \frac{3}{2}$.

22. а) Функция выпукла вниз при $x \in (-2\arctg\sqrt{0,6} + 2\pi n; 2\pi n)$, $n \in Z$ и при $x \in (2\arctg\sqrt{0,6} + 2\pi n; \pi + 2\pi n)$, $m \in Z$, функция выпукла вверх при $x \in (-\pi + 2\pi n; -2\arctg\sqrt{0,6} + 2\pi n)$, $n \in Z$ и при $x \in (2\pi n; 2\arctg\sqrt{0,6} + 2\pi n)$, $m \in Z$, точки перегиба $x = \pi m, m \in Z, x = \pm 2\arctg\sqrt{0,6} + 2\pi l, l \in Z$; б) функция выпукла вниз при $x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $m \in Z$, вверх при $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$, $m \in Z$, точки перегиба $x = \frac{-\pi + 2\pi m}{4}, m \in Z$; в) функция выпукла вниз при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right)$, $m \in Z$, вверх при $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $m \in Z$, точки перегиба $x = \frac{\pi m}{2}, m \in Z$; г) функция выпукла вниз при $x \in \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $m \in Z$, вверх при $x \in \left(-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $m \in Z$, точки перегиба $x = \pm \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}, m \in Z$.

23. а) $\frac{2}{x^3} + 8 \frac{3x^2 + 1}{(x^2 - 1)^3}$; б) $-\frac{6}{x^3} + \frac{48}{(x+1)^3} - \frac{60}{(x+2)^3}$;

в) $6(x-1)^2(12x^5 + 52x^4 + 71x^3 + 25x^2 - 11x - 5)$; г) $8(5x^3 + 27x^2 + 63x + 55)$.

24. а) $\frac{2(x+1)\cos x - (x^3 + 2x^2 + x + 2)\sin x}{(x+1)^3}$; б) $\frac{16(\operatorname{tg} 2x + 1)}{(\operatorname{tg} 2x - 1)^3 \cos^2 2x}$;

в) $4 \frac{\cos x + \cos 2x - 3}{(1 - 2 \cos x)^3}$; г) $4 \frac{\sin 8x + \cos 4x - \sin 4x + 3}{\cos^6 2x (\operatorname{tg} 2x - 1)^3}$.

25. а) Минимум $\left(\frac{3}{5}; \frac{1088}{625}\right)$, максимум $\left(-\frac{3}{5}; \frac{1412}{625}\right)$;

б) минимум $\left(-\frac{3}{2}(5 + \sqrt{11}); 6\sqrt{11} - 20\right)$, максимум $\left(\frac{3}{2}(\sqrt{11} - 5), -20 - 6\sqrt{11}\right)$;

в) отсутствуют; г) минимум $(0; 0)$, максимум отсутствует.

26. а) Максимумы $\left(\pm \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{47}}{7} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{1153}{96}\right), n \in \mathbb{Z}$, минимумы

$\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}; -13\right), k \in \mathbb{Z}, \left(\frac{2\pi m}{3}; -11\right), m \in \mathbb{Z}$;

б) максимумы $\left(\pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n; -1\right), n \in \mathbb{Z}, (\pi k; 1), k \in \mathbb{Z}$, минимумы

$\left(\pm \frac{\pi}{3} + \pi m, -\frac{5}{4}\right), m \in \mathbb{Z}$;

в) максимумы $(-2 \operatorname{arctg} 3 + 2\pi n; 20), n \in \mathbb{Z}$, минимумы $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi m, -4\right), m \in \mathbb{Z}$;

г) максимумы $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{1}{2}\right), n \in \mathbb{Z}$, минимумы $\left(-(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi m, -1\right), m \in \mathbb{Z}$.

27. а) Функция выпукла вверх на интервалах $\left(-\frac{1 + \sqrt{21}}{2}; -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{21} - 1}{2}; +\infty\right)$,

вниз на интервалах $\left(-\infty; -\frac{1 + \sqrt{21}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{21} - 1}{2}\right)$, точки перегиба $x = -\frac{1}{2}$,

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$;

б) функция выпукла вверх на интервалах $\left(-\frac{\sqrt{17} + 5}{2}; \frac{\sqrt{17} - 5}{2}\right), (0; +\infty)$; вниз на

интервалах $\left(-\infty; \frac{\sqrt{17} + 5}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{17} - 5}{2}; 0\right)$; точки перегиба $x = 0, x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$;

в) функция выпукла вниз при $x \in \mathbb{R}$, точек перегиба нет; г) функция выпукла вверх

на интервалах $\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$ и $(1; +\infty)$, вниз на интервалах $\left(-\infty; \frac{3}{5}\right)$ и $\left(\frac{4}{5}; 1\right)$, точки перегиба $x=1$, $x=\frac{3}{5}$, $x=\frac{4}{5}$.

28. а) Функция выпукла вверх на интервалах $\left(-\pi + 2\pi n; -2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{15}+8}{7} + 2\pi n\right)$;

$\left(2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{15}-8}{7} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$; $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;

вниз на интервалах $\left(-2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{15}+8}{7} + 2\pi k; 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{15}-8}{7} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$,

точки перегиба $x = -2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{15}+8}{7} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$, $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{15}-8}{7} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$;

б) функция выпукла вверх на интервалах

$\left(-\pi + 2\pi n; -2 \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{2}) + 2\pi n\right)$; $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < 2\pi n\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;

вниз на интервалах $\left(-2 \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{2}) + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$; $\left(2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$;

$\left(-2 \operatorname{arctg}(1 - \sqrt{2}) + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$;

точки перегиба $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$, $x = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$, $x = -2 \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{2}) + 2\pi s, s \in \mathbb{Z}$,

$x = -2 \operatorname{arctg}(1 - \sqrt{2}) + 2\pi t, t \in \mathbb{Z}$, $x = (-1)^p \frac{\pi}{6} + \pi p, p \in \mathbb{Z}$.

**Рубин Александр Григорьевич,
Чулков Павел Викторович**

**МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ
АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
10 класс**

Базовый и углублённый уровни

Подписано в печать 30.07.16. Формат 70×90/16.
Печать офсетная. Бумага офсетная. Гарнитура Журнальная.
Объём 26,5 п. л. Тираж 15 000. Заказ

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2;
953005 – литература учебная

Издательство «Баласс»
109147 Москва, Марксистская ул., д. 5, стр. 1
Почтовый адрес: 111123 Москва, а/я 2, «Баласс»
Телефоны для справок: (499) 110-69-68, (495) 368-70-54, 672-23-12
<http://www.school2100.ru> E-mail: izd@balass.su

Отпечатано в ООО «АВК-Пресс»
111033 Москва, Танковый проезд, д. 4, стр. 7